



Rotation terrestre et Variations du champ de gravité: Etude et apport des missions CHAMP et GRACE

G. Bourda

► To cite this version:

G. Bourda. Rotation terrestre et Variations du champ de gravité: Etude et apport des missions CHAMP et GRACE. Sciences de la Terre. Observatoire de Paris, 2004. Français. NNT: . tel-00008286

HAL Id: tel-00008286

<https://theses.hal.science/tel-00008286>

Submitted on 27 Jan 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS
EN DYNAMIQUE DES SYSTÈMES GRAVITATIONNELS

ROTATION TERRESTRE
ET
VARIATIONS DU CHAMP DE GRAVITÉ

*Étude et apport
des missions CHAMP et GRACE*

GÉRALDINE BOURDA

Soutenue à l'Observatoire de Paris le 20 Décembre 2004 devant le jury composé de :

Michel Kasser
Véronique Dehant
Markus Rothacher
Harald Schuh
Nicole Capitaine
Richard Biancale

*Président
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Directrice de thèse
Co-Directeur de thèse*

Table des matières

Résumé	7
Summary	9
Introduction	11
I Présentation générale de la Rotation et du Champ de gravité terrestres	15
1 Rotation terrestre	17
1.1 Introduction	17
1.2 Equations de la rotation de la Terre	18
1.2.1 Modèle de Terre rigide	18
1.2.2 Modèle de Terre non rigide	21
1.2.3 Modèle de Terre formée de couches : Couplages aux frontières	28
1.3 Paramétrisation de la rotation terrestre	29
1.3.1 Définition du pôle céleste intermédiaire (CIP)	29
1.3.2 La rotation terrestre, passage d'un système de référence céleste à un système de référence terrestre : définition des paramètres d'orientation terrestre (EOP)	30
1.3.3 Méthodes spatiales géodésiques de détermination des paramètres d'orientation terrestre	35
1.4 Lien entre les paramètres d'orientation terrestre et les composantes du vecteur instantané de rotation ($\vec{\omega}$)	37
1.5 Variations de l'orientation terrestre : Connaissances actuelles, Limitations et Progrès à faire	37
1.5.1 Variation de la vitesse de rotation terrestre	38
1.5.2 Variation de l'axe de rotation dans la Terre	40
1.5.3 Variation de l'axe de rotation dans l'espace	43
1.6 Conclusion	44
2 Champ de gravité terrestre	45
2.1 Introduction	45
2.2 Modélisation en harmoniques sphériques	46
2.3 Détermination pratique des coefficients du potentiel de gravité	50
2.3.1 Equations du mouvement d'un satellite artificiel : Problème des deux corps perturbé	51

2.3.2	Méthode des moindres carrés pour la restitution d'orbite	53
2.4	Variations temporelles du champ de gravité terrestre	55
2.4.1	Détermination grâce à la télémétrie laser sur satellite	55
2.4.2	Variations du coefficient C_{20}	56
2.4.3	Contributions à la Rotation de la Terre : Connaissances actuelles, Limitations et Progrès	58
2.5	Conclusion	59
3	Liens entre Champ de gravité et Rotation terrestre	61
3.1	Introduction	61
3.2	Liens entre coefficients de Stokes et moments d'inertie terrestres	62
3.3	Lien avec chacun des paramètres d'orientation terrestre	63
3.3.1	Vitesse de rotation terrestre : Durée du jour	63
3.3.2	Orientation de l'axe de rotation dans la Terre : Mouvement du pôle	65
3.3.3	Orientation de l'axe de rotation dans l'espace : Precession-Nutation	66
3.4	Conclusion	75
4	Conclusion de la Première Partie	77
II	Missions CHAMP et GRACE : études numériques et utilisation de données géodésiques	79
5	Missions satellitaires gravimétriques récentes	81
5.1	Introduction	81
5.2	Mission CHAMP	82
5.2.1	Instruments à bord	84
5.2.2	Buts scientifiques et résultats	84
5.3	Mission GRACE	87
5.3.1	Instruments à bord	88
5.3.2	Buts scientifiques et résultats	89
5.4	Conclusion	89
6	Comparaison de différentes méthodes d'intégration numérique pour le calcul d'orbites	91
6.1	Introduction	91
6.2	Théorie de l'intégration numérique pour le calcul d'orbites	91
6.3	Méthode de Cowell	93
6.4	Méthode d'Encke	94
6.4.1	Orbite de référence	95
6.4.2	Equations différentielles à résoudre avec la méthode d'Encke	98
6.5	Comparaison des deux méthodes et résultats	101
6.6	Conclusion	108
7	Nouvelle détermination du champ de gravité variable à partir d'observations des satellites Lageos I et II	109
7.1	Introduction	109
7.2	Modèles a priori pour les variations des coefficients de Stokes de degré 2 . .	113

7.2.1	Variations dues à la pression atmosphérique	113
7.2.2	Variations dues à la Marée solide	115
7.2.3	Variations dues aux Marées océaniques	117
7.3	Nouvelle détermination du champ de gravité variable	121
7.3.1	Résultats	121
7.3.2	Comparaisons	121
7.4	Détermination basée sur des contraintes issues de données de la mission GRACE	124
7.4.1	Données de la mission GRACE utilisées	124
7.4.2	Résultats et Comparaisons	124
7.5	Conclusion	130
8	Conclusion de la Deuxième Partie	131

III Analyse et interprétation de l'influence des variations du champ de gravité sur les paramètres d'orientation terrestre 133

9	Vitesse de rotation terrestre : Durée du jour	135
9.1	Introduction	135
9.2	Application	136
9.2.1	Calcul du $\Delta(LOD)_{matiere}$ à partir des observations de la longueur du jour	136
9.2.2	Calcul du $\Delta(LOD)_{matiere}$ à partir des variations temporelles du coefficient de Stokes C_{20}	140
9.2.3	Comparaison des deux approches	141
9.2.4	Informations géophysiques apportées par la série temporelle C_{20}	145
9.3	Conclusion	146
10	Mouvement du pôle	149
10.1	Introduction	149
10.2	Application	150
10.2.1	Calcul de $\chi_{matiere}$ à partir de l'excitation géodésique du mouvement du pôle	150
10.2.2	Calcul de $\chi_{matiere}$ à partir des coefficients de gravité \bar{C}_{21} et \bar{S}_{21}	153
10.3	Discussion	154
11	Précession Nutation	155
11.1	Introduction	155
11.2	Valeurs numériques pour les variables de ce problème	156
11.3	Séries temporelles du coefficient de Stokes C_{20} utilisées	156
11.4	Ajustements dans les données de ΔH	157
11.5	Effets des différentes contributions à ΔH sur les angles de précession	160
11.5.1	Influence de \dot{J}_2	160
11.5.2	Précession - Effet de différentes valeurs pour la partie constante H	160
11.5.3	Contributions périodiques à ΔH : effet sur ψ_A et ω_A	161
11.6	Discussion et conclusion	164

12 Conclusion de la Troisième Partie	165
Conclusions générales et perspectives	167
Annexes	173
A Quelques définitions pratiques	173
B Moments et Forces : Rappels élémentaires de mécanique du solide	175
C Relations cinématiques d'Euler : Mouvement de l'axe de rotation dans l'espace	179
D Détermination pratique des paramètres d'orientation terrestre	181
D.1 Cas satellitaire	181
D.1.1 LASER	182
D.1.2 DORIS	182
D.1.3 GPS	183
D.2 VLBI	183
E Premiers termes du potentiel gravitationnel terrestre	187
F Eléments orbitaux d'un satellite	189
G Liens entre inertie et coefficients du potentiel de gravité terrestre	191
H Ellipticité dynamique	195
I Méthode d'intégration numérique d'Encke dans le logiciel GINS	197
J Abréviations	200
Références bibliographiques	203

Résumé

Les distributions des masses à l'intérieur de la Terre régissent la vitesse de rotation terrestre (équivalente à la longueur du jour), ainsi que le comportement de l'axe de rotation terrestre dans la Terre (mouvement du pôle), et dans l'espace (précession-nutation). Ces distributions de masses peuvent être mesurées depuis l'espace grâce aux satellites artificiels, dont l'orbitographie donne accès à la détermination du champ de gravité terrestre. Par conséquent, les variations temporelles du champ de gravité peuvent être reliées aux variations des paramètres d'orientation terrestre (via le tenseur d'inertie).

Des progrès considérables ont été effectués ces dernières années dans la modélisation des effets des couches fluides (atmosphère et océans). Et de nos jours, les mesures d'orientation terrestre dans l'espace obtenues par Interférométrie à très Longue Base (VLBI) ont une exactitude meilleure qu'une milliseconde de degré. Ceci permet de progresser dans la connaissance de la dynamique globale de la Terre. Ce travail de thèse a pour but d'utiliser la mesure du champ de gravité et de ses variations comme outil pour compléter la modélisation de la rotation terrestre.

Dans une première partie de la thèse, nous nous sommes attachés à établir les liens théoriques entre les Paramètres d'Orientation Terrestres (EOP) et les variations des coefficients du champ de gravité (Lambeck 1980, Gross 2000).

Dans une deuxième partie, nous avons abordé les nouvelles missions gravimétriques CHAMP et GRACE. En vue de l'utilisation des mesures du satellite GRACE, d'une grande précision, nous avons effectué des comparaisons précises de différentes méthodes numériques d'intégration d'orbite dans le logiciel GINS du GRGS (telles la méthode de Cowell, généralement utilisée en orbitographie, et celle d'Encke). Nous avons également présenté la redétermination du champ de gravité effectuée au GRGS, grâce aux mesures des satellites Lageos I et Lageos II (satellites observés par télémétrie laser), entre 1985 et 2004. Elle est basée sur le champ statique EIGEN-GRACE qui permet de fixer les coefficients de hauts degrés afin de mieux déterminer le degré deux. Sur la base de ces séries temporelles de coefficients de degré 2 du champ de gravité terrestre, nous avons testé l'utilisation de données GRACE (coefficients zonaux de degrés pair) en tant que contraintes, afin d'essayer de mieux décorer les coefficients en cause.

Dans une troisième partie, nous avons utilisé ces différentes séries temporelles à notre disposition, basées sur l'étude de l'orbitographie de plusieurs satellites géodésiques (observés par télémétrie laser), afin d'en déduire leur apport dans la détermination des paramètres d'orientation terrestre (vitesse de rotation terrestre, mouvement du pôle et précession-nutation).

Nous avons étudié l'effet des variations de C_{20} sur les variations de la longueur du jour et sur la précession-nutation, puis l'effet des coefficients de Stokes C_{21} et S_{21} sur l'excitation du mouvement du pôle.

Nous avons en particulier évalué l'effet des variations temporelles de C_{20} déterminées par géodésie spatiale sur la précession-nutation, par l'intermédiaire de l'ellipticité dynamique terrestre H . Ces effets ont été étudiés théoriquement par Williams (1994) et Capitaine et al. (2003) (pour la précession), et par Souchay & Folgueira (1999) et Lambert & Capitaine (2004) (pour la nutation). Nous en avons conclu que l'apport périodique principal était dû aux variations de C_{20} causées par les marées terrestres solides ($\sim 100 \mu\text{as}$). Cette étude nous a permis de proposer différents modèles de contributions à la précession-nutation, basés sur les différents ajustements de séries géodésiques de C_{20} (différents termes séculaires, annuels et semi-annuels). Ce travail permet de contraindre les modèles de précession de très haute précision (sur quelques siècles).

Summary

The masses distributions inside the Earth govern the Earth rotation rate (or equivalently, length of day), as well as the behaviour of the rotation axis in the Earth (polar motion), and in space (precession-nutation). These distributions of masses can be measured by space owing to artificial satellites, the orbitography of which provides the Earth gravity field determination. Then, the temporal variations of the Earth gravity field can be related to the variations of the Earth Orientation Parameters (EOP) (with the Inertia Tensor).

In the last years, significant progresses have been made in the framework of the fluid layers effects modelisation (atmosphere and oceans). And nowadays, the Earth orientation measurements in space, obtained with Very Long Baseline Interferometry (VLBI), have a precision better than the milliarcsecond level. We can then make progress in the knowledge of the Earth global dynamics. The goal of this thesis work is to use the Earth gravity field measurements, as well as its variations, as a tool to complete the Earth orientation modelisation.

In a first step of this thesis, we developed the theoretical links between the Earth Orientation Parameters (EOP) and the temporal variations of the gravity field (Lambeck 1980, Gross 2000).

In a second step, we introduced the new gravimetric missions CHAMP and GRACE. In order to use the GRACE measurements, which precision is very good, we investigated precise comparisons between the various numerical methods (i.e. the Cowell and Encke methods) for orbit integration, into the GRGS software (i.e. GINS). We also presented the new series (of the Earth Gravity Field degree 2 coefficients) computed by the GRGS, based on (i) Lageos I and II positioning (satellites observed with laser telemetry) from 1985 to 2004, and (ii) the implementation of the static gravity field EIGEN-GRACE. With this latter, we can fix the higher degree Stokes coefficients, in order to better determine the degree 2 ones. On this basis, we tested the use of some temporal variations gravity field coefficients from GRACE (e.g. zonal and even coefficients) as constraints, in order to better decorelate the Earth gravity field degree 2-coefficients that we need.

In a third part, we used these various temporal series based on the orbitography of several geodetic satellites (observed with laser telemetry), in order to deduce their usefulness for determining the Earth Orientation Parameters (speed of rotation, polar motion and precession-nutation).

We studied the effect of the C_{20} variations on the length of day and precession-nutation, and the effect of the C_{21} and S_{21} coefficients on the polar motion excitation.

In particular, we have evaluated the effect of the C_{20} temporal variations, determined by space geodesy, onto the precession-nutation, with the Earth dynamical flattening H . These effects have been theoretically studied by Williams (1994) and Capitaine et al. (2003) (for the precession), and by Souchay & Folgueira (1999) and Lambert & Capitaine (2004) for the nutation. We concluded that the major periodical contribution was due to the C_{20} variations coming from the solid Earth tides ($\sim 100 \mu\text{as}$). This study allowed us to propose various models for contributing to the precession-nutation, based on various adjustments for the geodetic C_{20} variations series (various secular trends, annual and semi-annual terms). This study can be useful to constraint the high precision precession models (over a few centuries).

Introduction

De la Rotation de la Terre

La connaissance de la rotation terrestre est primordiale pour des domaines tels que l'astrométrie, la géodésie spatiale, l'astrophysique, ou encore la géophysique. Il est en effet nécessaire soit de l'observer avec précision, soit de s'en affranchir, soit de la modéliser au mieux afin par exemple de positionner les satellites artificiels en orbite autour de la Terre. La rotation de la Terre peut être vue comme le passage du repère terrestre (dont le troisième axe est l'axe des pôles géographique) au repère céleste. Elle présente trois caractéristiques : (i) la vitesse de rotation terrestre, et l'orientation de son axe de rotation (ii) par rapport à la Terre, puis (iii) par rapport à l'espace.

Pour étudier la rotation terrestre, nous nous intéressons aux caractéristiques de ces trois phénomènes, que l'on nomme respectivement : (i) variation de vitesse de rotation terrestre (ou bien encore variation de la durée du jour), (ii) mouvement du pôle, et (iii) précession-nutation. En pratique ils sont modélisés à l'aide de cinq paramètres (appelés paramètres d'orientation terrestre ou EOP, *Earth Orientation Parameters*) qui sont respectivement : (i) l'angle de rotation terrestre, (ii) les coordonnées du pôle de rotation dans le repère terrestre (x_p et y_p), et les écarts au pôle céleste ($d\psi$ et $d\epsilon$, ou bien dX et dY). Ces paramètres sont déterminés grâce aux mesures de géodésie spatiale issues des techniques d'Interférométrie à très longue base (VLBI, *Very Long Baseline Interferometry*), de positionnement global (GPS, *Global Positionning System*), de tirs laser sur satellite (SLR, *Satellite Laser Ranging*) ou sur la Lune (LLR, *Lunar Laser Ranging*), ou encore de la détermination des orbites de satellites par positionnement Doppler (DORIS, Détermination d'orbites et de Radiopositionnement Intégrés par Satellites). Ces techniques se réfèrent au Pôle Céleste Intermédiaire (CIP, *Celestial Intermediate Pole*), qui reste toujours proche de l'axe instantané de rotation (écart inférieur à 1 m).

Du Champ de Gravité terrestre

Le champ de gravité terrestre caractérise l'ensemble des forces de gravitation de la Terre. Sa connaissance est primordiale pour le suivi des satellites artificiels en orbite autour de la Terre. Mais inversement, déterminer avec précision le positionnement de ces satellites artificiels nous permet d'améliorer les modèles de champ de gravité déterminés par géodésie spatiale. Il est modélisé par des coefficients appelés coefficients de Stokes (ou coefficients des harmoniques sphériques), qui sont déterminés par un ajustement numérique des modèles implémentés (pour les équations du mouvement, le champ de gravité terrestre, l'attraction lunisolaire et des autres planètes, la pression de radiation solaire, l'albédo ou encore les forces surfaciques) aux mesures fournissant la position de l'orbite du satellite (mesures SLR, LLR, GPS, ou encore DORIS).

En pratique, plusieurs satellites artificiels avec des caractéristiques d'orbites différentes sont nécessaires à la détermination d'un champ de gravité statique. De nos jours, la combinaison des données de ces satellites permet de déterminer des séries temporelles des coefficients du champ du gravité. Ces variations temporelles apportent des informations sur les redistributions de masses dans le système terrestre global (Terre solide - Atmosphère - Océans - Hydrosphère), et ont ainsi des implications géophysiques. Afin de déterminer ces coefficients tous les mois, il est nécessaire que les satellites utilisés dans les traitements y soient sensibles, et ceci dépend de leurs éléments orbitaux. Les satellites géodésiques Lageos I et Lageos II ont la forme de boules et sont situés en haute altitude, ils ne sont donc pas beaucoup perturbés par les forces autres que la gravité terrestre. Ils permettent par conséquent en particulier de bien déterminer les variations temporelles du coefficient C_{20} de degré 2 et d'ordre 0 du champ de gravité, qui caractérise l'aplatissement terrestre aux pôles.

Cadre de la thèse

Les écarts au pôle céleste (obtenus grâce à la technique VLBI) donnent les écarts du CIP par rapport à sa position définie par un modèle de précession-nutation de référence (UAI 2000, Mathews et al. 2002; Résolution B1.6 de l'UAI). Ce modèle UAI 2000 est très précis et donne les termes de nutation à 200 μ s près. Les résidus obtenus correspondant aux écarts au pôle céleste proviennent notamment d'effets du noyau terrestre non modélisés.

Par ailleurs, les techniques VLBI et GPS ont permis une amélioration des mesures des variations de la vitesse de rotation terrestre ainsi que du mouvement du pôle. Ces mesures peuvent alors être confrontées aux modèles disponibles d'excitation de ces deux composantes en particulier par les couches fluides atmosphérique et océanique. Des progrès considérables ont été effectués ces dernières années dans la modélisation des effets des couches fluides, grâce aux divers centres de données. Le GGFC de l'IERS (*Global Geophysical Fluid Center*) met à disposition ces modèles de moments cinétiques atmosphérique et océanique, par l'intermédiaire des bureaux spéciaux de l'atmosphère (SBA) et de l'océan (SBO) (*Special Bureau for Atmosphere, Special Bureau for Oceans*). Il s'avère que l'on explique comme cela une grande partie des variations observées (90% de la variation de la vitesse de rotation de la Terre est expliquée par l'effet des vents).

Par conséquent, grâce aux progrès effectués dans la modélisation de la rotation de la Terre, il est dorénavant possible de s'intéresser aux effets résiduels, pouvant provenir par exemple de l'hydrologie ou d'effets non encore modélisés.

Des satellites gravimétriques dotés d'accéléromètres embarqués, permettant de mesurer les forces surfaciques en temps réel, ont été lancés en orbite basse autour de la Terre, en 2000 et 2002 : CHAMP et GRACE, respectivement. Ils doivent permettre de mieux déterminer encore le champ de gravité (plus hauts degrés et ordre dans le développement en harmoniques sphériques). Le satellite GRACE, composé de deux satellites co-orbitaux, est destiné à déterminer les variations temporelles du champ de gravité grâce à une nouvelle technique (mesure de distance inter-satellite), et ainsi permettre de mesurer notamment les effets géophysiques de plus petite échelle spatiale (résolution de l'ordre de 100 km; effets des courants océaniques, hydrologie, etc...).

La géodésie spatiale permet donc de déterminer le champ de gravité statique et variable de la Terre dans sa globalité, contrairement aux EOP qui sont relatifs au manteau de la Terre seul (en fait, relatifs à la croûte terrestre, considérée comme solidaire du manteau). Le but de ce travail de thèse est d'utiliser des données de variations du champ de gravité (modèle GRIM5 ; modèle issu des données de positionnement des satellites Lageos I et Lageos II) afin d'évaluer leur contribution à la modélisation de la rotation de la Terre. Ce travail est l'un des premiers dans ce domaine et prépare l'utilisation future de données du champ de gravité variable déterminées grâce au satellite GRACE.

Plan de la thèse

Dans la première partie de la thèse, nous nous attachons à présenter les théories cinématiques et dynamiques de la rotation terrestre (Chapitre 1), ainsi que la modélisation et la détermination du champ de gravité statique et variable (Chapitre 2). Ces deux premiers chapitres sont des rappels indispensables à la suite de l'étude. Dans le Chapitre 3, nous rappelons les relations entre les moments d'inertie de la Terre et les variations des coefficients du champ de gravité de degré 2. Nous développons ainsi les équations reliant les paramètres d'orientation terrestres (durée du jour, mouvement du pôle et précession-nutation) à ce champ de gravité variable. Ce chapitre établit la méthodologie nécessaire à la troisième partie de la thèse, afin d'exploiter au mieux les données de variations temporelles du champ de gravité et évaluer leur influence sur chacun des EOP.

La deuxième partie de la thèse est consacrée à la géodésie spatiale et à la détermination du champ de gravité terrestre. Nous présentons tout d'abord dans le Chapitre 5 les nouvelles missions gravimétriques CHAMP et GRACE, ainsi que leurs buts et leurs perspectives.

La mesure de distance inter-satellite des satellites GRACE étant très précise (de l'ordre de $10 \mu\text{m}$), nous testons et comparons dans le Chapitre 6 deux méthodes d'intégration numérique pour le calcul d'orbites, implémentées dans le logiciel d'orbitographie du GRGS/CNES. Dans l'optique de ne pas dégrader la bonne précision des mesures des satellites GRACE, nous étudions l'erreur numérique engendrée par de telles méthodes (elle ne doit alors pas être supérieure au micromètre).

Jusqu'à présent, nous disposons d'une série temporelle de variations du coefficient C_{20} du champ de gravité pour nos études sur la rotation de la Terre (série GRIM5). Cependant, elle n'est pas tout à fait homogène et présente certains problèmes d'aliasing dans les phénomènes périodiques. Par conséquent, sur la base des données des satellites Lageos I et II, une redétermination du champ de gravité a été faite par le GRGS sur la période de 1985 à nos jours (Biancale & Lemoine 2004), en se basant sur le champ statique EIGEN-GRACE (déterminé grâce à des données de GRACE et considéré comme très bon). Ce dernier permet de fixer les coefficients de hauts degrés afin de mieux déterminer le degré deux. A partir de ces séries, nous évaluons dans le Chapitre 7 l'apport de contraintes sur les variations du champ déterminées grâce à GRACE (contraintes sur certains coefficients J_3 , J_4 , etc...), dans la détermination des variations temporelles de C_{20} , C_{21} , S_{21} , C_{22} et S_{22} .

Dans la troisième partie de la thèse, nous nous basons sur les séries temporelles du GRGS pour évaluer l'influence des variations temporelles des coefficients de degré 2 du champ de gravité sur chacun des EOP. Le but est d'essayer de compléter la modélisation

de la rotation de la Terre. Nous testons ici si la géodésie spatiale, et plus particulièrement le champ de gravité variable, peut apporter des éléments de réponse. Dans le Chapitre 9, nous comparons le $\Delta(LOD)$ (écart de la longueur du jour par rapport à 86400 s du SI) obtenu avec ΔC_{20} à celui provenant des mesures astronomiques (GPS, par exemple). Dans le Chapitre 10, nous utilisons les séries temporelles de C_{21} et S_{21} pour calculer l'excitation du mouvement du pôle correspondante. Nous la comparons à l'excitation géodésique issue des données des composantes x_p et y_p du mouvement du pôle (IERS). Dans le Chapitre 11, basé sur l'article de Bourda & Capitaine (2004), nous introduisons les variations séculaires et périodiques de $J_2 = -C_{20}$ dans les équations de la précession-nutation, par l'intermédiaire du paramètre d'ellipticité dynamique H .

Première partie

Présentation générale de la Rotation et du Champ de gravité terrestres

Chapitre 1

Rotation terrestre

1.1 Introduction

Le mouvement de rotation de la Terre aurait été initié lors de la formation de notre planète par accréation de particules et poussières, il y a 4.6 milliards d'années. Le phénomène le plus connu agissant sur l'évolution à long terme de la rotation terrestre est le ralentissement dû aux marées. En effet, la Lune exerce une attraction gravitationnelle sur la Terre et crée ainsi le bourrelet équatorial terrestre. Du fait de la dissipation d'énergie à l'intérieur de la Terre, notre planète réagit à cette force avec un retard et le bourrelet ne se forme qu'après avoir croisé la Lune. Il est donc en avance sur la révolution lunaire. C'est pourquoi la Lune exerce un couple mécanique sur le bourrelet équatorial terrestre et freine ainsi la rotation de la Terre. D'autres phénomènes entrent également en jeu et modifient la rotation terrestre, que ce soit par un changement de sa vitesse ou de la direction de son axe de rotation. De ce fait, étudier la rotation de la Terre revient à étudier 3 types de variations (voir §1.5) :

- Le **mouvement du pôle** de rotation terrestre dans la Terre ;
- Le mouvement de l'axe de rotation terrestre dans l'espace : la **précession** est la composante séculaire de ce mouvement (~ 1 cycle en 25800 ans) et la **nutation** en est sa composante périodique ;
- Les variations de la **vitesse de rotation terrestre** : considérées aussi sous la forme de l'écart de la longueur du jour par rapport à la durée nominale de 86400 s.

Nous décrivons la rotation terrestre au moyen du vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$, dont la norme est la vitesse de rotation terrestre et dont la direction est celle de l'axe de rotation terrestre (voir Annexe A).

Nous rappellerons dans ce chapitre les éléments principaux de la théorie de la rotation de la Terre, selon deux approches complémentaires : l'une, dynamique, basée sur le théorème du moment cinétique appliqué à un modèle de Terre rigide ou réelle (§1.2), l'autre, cinématique, considérant la rotation terrestre comme le passage d'un repère céleste particulier à un repère terrestre (§1.3). Ces deux approches distinctes de la théorie de la rotation terrestre ont chacune leur intérêt : la première a des applications géophysiques, alors que la deuxième permet l'interprétation des observations. Nous détaillerons aussi les paramètres d'orientation terrestres (EOP) utilisés en pratique afin de déterminer les variations de la rotation de la Terre, ainsi que les méthodes de géodésie nous permettant de les déterminer (§1.3). Nous établirons ensuite le lien entre les composantes du vecteur instantané de rotation et les EOP (§1.4), relations qui nous permettront par la suite de

relier les coefficients variables du champ de gravité terrestre aux EOP (chapitre 3). Enfin, nous détaillerons l'état actuel des connaissances relatives aux variations de la rotation terrestre, ainsi que les limitations rencontrées de nos jours et les progrès qui restent à effectuer (§1.5).

1.2 Equations de la rotation de la Terre

Pour étudier la dynamique de la rotation terrestre, la Terre peut être modélisée de différentes manières. En allant du cas le plus simple, au plus complexe mais plus réaliste, on distingue les modèles suivants :

- Corps ellipsoïdal rigide,
- Corps ellipsoïdal élastique,
- Corps déformable et formé de différentes couches : par exemple, une Terre peut être vue comme un ellipsoïde composé d'un manteau élastique (la croûte terrestre étant considérée comme solidaire du manteau), d'un noyau extérieur fluide, d'un noyau intérieur solide et de couches superficielles fluides (telles l'atmosphère et l'océan).

Les équations de la rotation terrestre présentées se basent sur la théorie d'Euler concernant la rotation de tout corps ellipsoïdal rigide autour de son centre de masse. Elle permet d'établir le mouvement de l'axe instantané de rotation dans la Terre.

1.2.1 Modèle de Terre rigide

Rappel des équations

Les équations fondamentales régissant la rotation de la Terre sont celles du théorème du moment cinétique \vec{H} , appelées *équations dynamiques d'Euler*. Elles décrivent la réponse rotationnelle de la Terre à un moment de force \vec{L} dans un référentiel inertiel (voir par exemple Munk & MacDonald 1960) :

$$\dot{\vec{H}} = \vec{L} \quad (1.1)$$

Et dans un repère lié au corps en rotation (i.e. tournant avec ce corps), ces équations deviennent :

$$\frac{d\vec{H}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{H} = \vec{L} \quad (1.2)$$

où $\vec{\omega}$ est le vecteur instantané de rotation (de norme la vitesse angulaire et de direction celle de l'axe de rotation) par rapport au repère inertiel (voir Annexe A).

De plus, on a par définition : $\vec{H} = \int_M \vec{x} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{x}) dM = \bar{\mathbf{I}} \vec{\omega}$, où $\bar{\mathbf{I}}$ est le *Tenseur d'inertie* (voir Annexe B). Par conséquent, dans un repère lié à la Terre en rotation, les équations d'Euler deviennent :

$$\frac{d(\bar{\mathbf{I}} \vec{\omega})}{dt} + \vec{\omega} \wedge (\bar{\mathbf{I}} \vec{\omega}) = \vec{L} \quad (1.3)$$

Dans un référentiel fixe par rapport au corps rigide, $\bar{\mathbf{I}}$ ne varie pas avec le temps, on a

alors :

$$\begin{aligned}
I_{ij} &= - \int_V x_i x_j \, dM = 0 \quad \text{pour } i \neq j \\
I_{11} &= \int_V (y^2 + z^2) \, dM = A \\
I_{22} &= \int_V (x^2 + z^2) \, dM = B \\
I_{33} &= \int_V (x^2 + y^2) \, dM = C
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Par conséquent, d'après l'équation (1.3) et dans un modèle de Terre rigide, on obtient le modèle d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{C-B}{A} \omega_2 \omega_3 = \frac{L_1}{A} \\ \frac{d\omega_2}{dt} - \frac{C-A}{B} \omega_1 \omega_3 = \frac{L_2}{B} \\ \frac{d\omega_3}{dt} + \frac{B-A}{C} \omega_1 \omega_2 = \frac{L_3}{C} \end{cases} \tag{1.5}$$

où $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. On considère en général que le vecteur de rotation $\vec{\omega}$ s'éloigne peu d'un vecteur moyen, ce qui est confirmé par les observations. Par conséquent, on écrit :

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 1 + m_3 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

où m_1 et m_2 représentent le déplacement de l'axe de rotation dans la Terre (mouvement polaire), m_3 est la variation relative de la vitesse de rotation terrestre (voir Fig. 1.1), et Ω est la vitesse angulaire moyenne de la Terre (7.29×10^{-5} rad/s). De manière générale, les m_i sont des petites quantités ($\simeq 10^{-6}$) et correspondent aux écarts du vecteur rotation $\vec{\omega}$ par rapport à la rotation moyenne.

Ainsi, si on néglige les termes du second ordre dans l'équation (1.5) et si on considère un modèle de Terre symétrique ($A = B$), alors on obtient les *équations de Liouville* associées à un modèle de Terre rigide :

$$\begin{cases} \dot{m} - i\sigma_r m = \psi_r \\ \dot{m}_3 = \psi_3 \end{cases} \tag{1.7}$$

où $m = m_1 + i m_2$, $\sigma_r = \frac{C-A}{A} \Omega$ (nommée *pulsation d'Euler*) et $\psi_r = \psi_1 + i \psi_2$. On appelle enfin ψ_r et ψ_3 des *fonctions d'excitation* et elles sont proportionnelles au moment de force extérieur (en l'occurrence, exercé par le couple luni-solaire) :

$$\begin{cases} \psi_1 = L_1/(A \Omega) \\ \psi_2 = L_2/(A \Omega) \\ \psi_3 = L_3/(C \Omega) \end{cases} \tag{1.8}$$

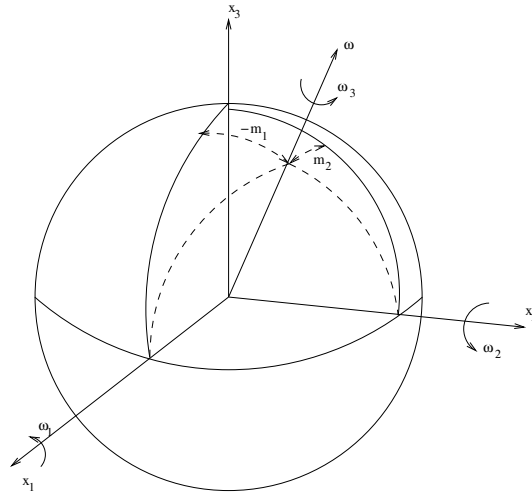


FIG. 1.1 – Coordonnées du vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$, dans le repère terrestre (x_1, x_2, x_3) .

Solution des équations : Mouvement de l'axe de rotation dans la Terre

La solution générale de l'équation (1.7) est la somme de la solution de l'équation homogène (i.e. $\vec{L} = \vec{0}$) associée et d'une solution particulière (i.e. solution forcée). Pour ($\vec{L} = \vec{0}$) la solution s'écrit :

$$\begin{cases} \omega_1 &= a_0 \cos \sigma_r t + b_0 \sin \sigma_r t \\ \omega_2 &= a_0 \sin \sigma_r t - b_0 \cos \sigma_r t \\ \omega_3 &= C^{te} \end{cases} \quad (1.9)$$

où a_0 et b_0 sont des constantes d'intégration. Cette solution correspond à un mouvement de rotation uniforme dont l'axe est animé d'un mouvement libre périodique par rapport à la croûte terrestre (période de 305 jours), appelé *mouvement de Chandler*.

Dans le cas d'un corps rigide, le seul moment de force extérieur non négligeable que puisse subir la Terre est celui des forces gravitationnelles de marées du système solaire, et avant tout du Soleil et de la Lune. Pour exprimer le couple luni-solaire \vec{L} , on peut introduire le potentiel gravitationnel terrestre U (exercé sur la Lune et le Soleil) et en vertu du principe de l'action-réaction écrire :

$$\vec{L} = -m_{lune} \vec{r}_{lune} \wedge \vec{\nabla} U(\vec{r}_{lune}) - m_{soleil} \vec{r}_{soleil} \wedge \vec{\nabla} U(\vec{r}_{soleil}) \quad (1.10)$$

Si on se limite à l'ordre 2 du développement du potentiel et que l'on utilise des développements de Doodson en séries d'ondes (en notant ω_j la fréquence de l'onde d'indice j , β_j sa phase et A_{21j} son coefficient), on obtient l'expression suivante de $L = L_1 + i L_2$ (voir par exemple Capitaine 1982) :

$$L = -\frac{3 G m_{lune}}{c_{lune}^3} (C - A) \sum_j A_{21j} e^{-i(\omega_j t + \beta_j)} \quad (1.11)$$

où G est la constante gravitationnelle, m_{lune} est la masse de la Lune, c_{lune} est le demi-grand axe de la Lune autour de la Terre et chaque coefficient A_{21j} est réel et représente la

somme des coefficients du terme lunaire et du terme solaire de fréquence ω_j . On peut noter que la composante axiale L_3 du couple extérieur luni-solaire est nulle. Par intégration des équations (1.7), l'effet luni-solaire se réduit à une somme de termes circulaires équatoriaux (appelés dans la littérature *nutations diurnes*) d'amplitudes :

$$A_j = \frac{3 G m_{lune}}{c_{lune}^3} \frac{C - A}{C \Omega^2} \frac{A_{21j}}{(1 - \frac{A}{C} \frac{n_j}{\Omega})} \quad (1.12)$$

où $n_j = \Omega - \omega_j$ pour chacune des fréquences ω_j .

Pour trouver les variations correspondantes de l'orientation de la Terre dans l'espace, on utilise les **équations cinématiques d'Euler** (voir Annexe C).

1.2.2 Modèle de Terre non rigide

Considérons maintenant un modèle de Terre non rigide en rotation et donc déformable. Les principales différences à prendre en compte par rapport au cas d'un modèle de Terre rigide résident dans le fait que :

- Le tenseur d'inertie $\bar{\mathbf{I}}$ dépend du temps,
- Il existe un *moment cinétique relatif* au repère de référence terrestre (TRF), dû aux mouvements de masses par rapport au repère terrestre :

$$\vec{H}(t) = \bar{\mathbf{I}}(t) \vec{\omega}(t) + \vec{h}(t) \quad (1.13)$$

où $\vec{h} = \int_M (\vec{x} \wedge \vec{u}) dM$ est le vecteur moment angulaire dû au mouvement et \vec{u} est la vitesse de l'élément de masse dM par rapport au repère en rotation à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$.

Rappel des équations

Dans ce cas, l'équation (1.2) devient :

$$\frac{d}{dt} [\bar{\mathbf{I}}(t) \vec{\omega}(t) + \vec{h}(t)] + \vec{\omega}(t) \wedge [\bar{\mathbf{I}}(t) \vec{\omega}(t) + \vec{h}(t)] = \vec{L}(t) \quad (1.14)$$

On écrit aussi dorénavant pour le tenseur d'inertie $\bar{\mathbf{I}}$ (voir Annexe B) :

$$\begin{cases} I_{ij} = \Delta I_{ij}(t) & \text{pour } i \neq j \\ I_{11} = A + \Delta I_{11}(t) \\ I_{22} = A + \Delta I_{22}(t) \\ I_{33} = C + \Delta I_{33}(t) \end{cases} \quad (1.15)$$

où les $\Delta I_{ij}/C$ sont des petites quantités. Par conséquent, en reportant dans Eq. (1.14), les équations Eq. (1.6) et (1.15), tout en négligeant les termes du second ordre par rapport à m_i , ΔI_{ij} et h_i , on obtient les *équations de Liouville linéarisées* :

$$\begin{cases} \dot{m}_1/\sigma_r + m_2 = \psi_2 \\ \dot{m}_2/\sigma_r - m_1 = -\psi_1 \\ \dot{m}_3 = \psi_3 \end{cases} \quad (1.16)$$

où les *fonctions d'excitation de Liouville* ψ_i ($i=1,2,3$) comprennent des contributions complémentaires à celles de Eq. (1.8), et sont définies de la manière suivante :

$$\begin{cases} \psi_1 = (\Omega^2 \Delta I_{13} + \Omega \Delta \dot{I}_{23} + \Omega h_1 + \dot{h}_2 - L_2) / (\Omega^2 (C - A)) \\ \psi_2 = (\Omega^2 \Delta I_{23} - \Omega \Delta \dot{I}_{13} + \Omega h_2 - \dot{h}_1 + L_1) / (\Omega^2 (C - A)) \\ \psi_3 = (-\Omega^2 \Delta I_{33} - \Omega h_3 + \Omega \int_0^t L_3 dt) / (\Omega^2 C) \end{cases} \quad (1.17)$$

Dans un souci de concision, on écrit les équations (1.16) sous la forme complexe :

$$\begin{cases} m + i \dot{m} / \sigma_r = \psi \\ \dot{m}_3 = \dot{\psi}_3 \end{cases} \quad (1.18)$$

où $m = m_1 + i m_2$, $\sigma_r = \frac{C-A}{A} \Omega$ (pulsation d'Euler) et $\psi = \psi_1 + i \psi_2$, tel que :

$$\psi = \frac{i L}{\Omega^2 (C - A)} + \frac{c}{C - A} - \frac{i \dot{c}}{\Omega (C - A)} + \frac{h}{\Omega (C - A)} - \frac{i \dot{h}}{\Omega^2 (C - A)} \quad (1.19)$$

où $L = L_1 + i L_2$, $c = \Delta I_{13} + i \Delta I_{23}$ ($= c_{13} + i c_{23}$) et $h = h_1 + i h_2$. Les fonctions d'excitation résultent :

- (i) des redistributions de masse (partie appelée *matière*),
- (ii) des mouvements relatifs de matière (partie appelée *mouvement*), et
- (iii) des moments de forces extérieurs.

On séparera donc :

$$\psi(\text{matière}) = \frac{c}{C - A} \quad (1.20)$$

$$\psi(\text{mouvement}) = \frac{h}{\Omega (C - A)} - \frac{i \dot{c}}{\Omega (C - A)} - \frac{i \dot{h}}{\Omega^2 (C - A)} \quad (1.21)$$

$$\psi(\text{couple extérieur}) = \frac{i L}{\Omega^2 (C - A)} \quad (1.22)$$

ainsi que :

$$\psi_3(\text{matière}) = -\frac{\Delta I_{33}}{C} = -\frac{c_{33}}{C} \quad (1.23)$$

$$\psi_3(\text{mouvement}) = -\frac{h_3}{\Omega C} \quad (1.24)$$

$$\psi_3(\text{couple extérieur}) = \int_0^t L_3 dt / (\Omega C) \quad (1.25)$$

Déformation rotationnelle et effets de surcharge

Nous considérons une Terre déformable (i.e. non rigide), par conséquent la rotation terrestre diurne entraîne des déformations de la Terre (appelées déformations rotationnelles) qui peuvent s'écrire comme des incréments d'inertie ($\Delta I_{13}(t)$ et $\Delta I_{23}(t)$), dépendant

des composantes m_1 et m_2 du vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$ (voir Munk & Mac Donalds 1960, Lambeck 1980, et Barnes et al. 1983). Par conséquent le second membre ψ des équations (1.18) dépend de m , de la manière suivante :

$$\psi = \psi_r + \frac{k_2}{k_0} m \quad (1.26)$$

où $\frac{k_2}{k_0} m$ correspond à la déformation rotationnelle créée et $\psi_r = \psi_r^{\text{matière}} + \psi_r^{\text{mouvement}}$ correspond à ψ auquel on a retiré les incréments d'inertie dûs à la déformation rotationnelle.

Précisons tout d'abord à quoi correspondent k_2 (ici, nombre réel) et k_0 (voir Table 1.2). Ils sont appelés nombres de Love et caractérisent la déformation (la non-rigidité) de la Terre (voir par exemple Melchior 1972). Pour les déformations dues aux marées lunisolaires, le potentiel de marées est développable en fonctions sphériques, qui seront chacune proportionnelles à un nombre de Love dépendant du degré du développement. Ainsi k_2 est le nombre de Love de degré 2 caractérisant la déformation de la Terre sous l'effet du potentiel perturbateur de marées de degré 2. Puis k_0 est le nombre de Love séculaire, défini comme le nombre de Love k_2 mais agissant pour la déformation séculaire : $k_0 = 3 G (C - A) / (R_e^5 \Omega^2)$.

Par la suite, nous utiliserons aussi le nombre de Love k'_2 (voir Table 1.2) qui est le nombre de Love de surcharge de degré 2, caractérisant la déformation de la Terre sous un potentiel perturbateur de surcharge (couche fluide par exemple) de degré 2.

Si on désire maintenant isoler les composantes du vecteur instantané de rotation (en ne considérant pas les effets du couple extérieur) la première équation de Eq. (1.18) a une nouvelle forme (voir Eq. (1.26) et par exemple Lambeck 1980) :

$$\begin{aligned} i \frac{\dot{m}}{\sigma_r} + m &= \psi_r + \frac{k_2}{k_0} m \\ \Leftrightarrow i \frac{\dot{m}}{\sigma_r} + m - \frac{k_2}{k_0} m &= \psi_r \\ \Leftrightarrow i \frac{\dot{m}}{\sigma_r} + (1 - \frac{k_2}{k_0}) m &= \psi_r \\ \Leftrightarrow i \frac{k_0}{k_0 - k_2} \frac{\dot{m}}{\sigma_r} + m &= \frac{k_0}{k_0 - k_2} \psi_r \\ \Leftrightarrow i \frac{\dot{m}}{\sigma_0} + m &= \frac{k_0}{k_0 - k_2} \psi_r \end{aligned} \quad (1.27)$$

où $\sigma_0 = \sigma_r (1 - \frac{k_2}{k_0})$ est appelée la *pulsation de Chandler*.

Si on considère maintenant les effets de surcharge provoqués par certaines fonctions d'excitation (e.g. atmosphère, océan) sur la croûte terrestre, alors $k'_2 \psi_r^{\text{matière}}$ est ajouté à ψ_r (Barnes et al. 1983), où k'_2 est le nombre de Love de surcharge de degré 2. De la même manière, on ajoute $k'_2 \psi_3^{\text{matière}}$ à ψ_3 (voir Table 1.1).

Par conséquent, d'après le paragraphe précédent et l'équation (1.27), les équations (1.18) deviennent :

- Si la fonction d'excitation ψ_r engendre des effets de surcharge sur la croûte terrestre :

$$\begin{aligned} i \frac{\dot{m}}{\sigma_0} + m &= \frac{k_0}{k_0 - k_2} \psi_r^{\text{mouvement}} + (1 + k'_2) \frac{k_0}{k_0 - k_2} \psi_r^{\text{matière}} \\ m_3 &= \psi_3^{\text{mouvement}} + (1 + k'_2) \psi_3^{\text{matière}} \end{aligned} \quad (1.28)$$

- Sinon :

$$\begin{aligned} i \frac{\dot{m}}{\sigma_0} + m &= \frac{k_0}{k_0 - k_2} \psi_r \\ &= \frac{k_0}{k_0 - k_2} \psi_r^{\text{mouvement}} + \frac{k_0}{k_0 - k_2} \psi_r^{\text{matière}} \\ m_3 &= \psi_3 \\ &= \psi_3^{\text{mouvement}} + \psi_3^{\text{matière}} \end{aligned} \quad (1.29)$$

où $\sigma_0 = \frac{C_m - A_m}{A_m} \Omega (1 - \frac{k_2}{k_0})$. Classiquement, les fonctions d'excitation ne produisant pas d'effet de surcharge sur la croûte terrestre correspondent à h (partie mouvement), alors que celles provoquant un effet de surcharge correspondent à c (partie matière) (voir Eqs. (1.20)-(1.25)). On notera que C_m et A_m sont les moments principaux d'inertie axial et équatorial du manteau, respectivement. Toutes les valeurs numériques des paramètres entrant ici en jeu sont résumées dans la Table 1.2.

Dans la Table 1.2, nous rappelons la valeur de la pulsation de Chandler réelle σ_0 (elle correspond à une période de 433 jours; Vicente & Wilson 1997), tenant compte de la déformation rotationnelle, mais aussi de l'effet des océans et du noyau fluide (ce qui n'est pas fait dans le modèle précédent, mais la valeur ne diffère alors pas beaucoup de la réalité : $\sigma_0 = \frac{C_m - A_m}{A_m} \Omega (1 - \frac{k_2}{k_0})$ correspond à une période de 438 jours).

Autre formulation

En se référant à l'équation (1.18), on peut poser :

$$\begin{aligned} \psi &= \chi - \frac{i}{\Omega} \dot{\chi} \\ \psi_3 &= -\chi_3 \end{aligned} \quad (1.30)$$

On a donc d'après les équations (1.17) et (1.19) :

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{c}{C - A} + \frac{h}{\Omega (C - A)} \\ \chi_3 &= \frac{c_{33}}{C} + \frac{h_3}{C \Omega} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Ces fonctions d'excitation de la Terre (telles les fonctions d'excitation de l'océans ou de l'atmosphère) sont séparées en deux termes (voir Table 1.3) : (i) une partie matière (aussi

TAB. 1.1 – Facteurs multiplicatifs (Barnes et al. 1983) des fonctions d’excitation ψ_r et ψ_3 (des équations (1.28) et (1.29), respectivement), dans le cas où l’on exprime les déformations rotationnelles en fonction de m , agrémentées s’il y a lieu des effets de surcharge sur la croûte terrestre (suivant la fonction d’excitation considérée).

	Auteurs	Pas de surcharge	Effet de surcharge
Fonction d’excitation équatoriale	Barnes et al. 1983 ou Lambeck 1980	$\frac{k_0}{k_0 - k_2}$	$(1 + k'_2) \frac{k_0}{k_0 - k_2}$
	Munk & Mac Donald 1960	$\frac{k_f}{k_f - k}$	$(1 + k') \frac{k_f}{k_f - k}$
	Valeur numérique correspondante	1.43	1.
Fonction d’excitation axiale	Barnes et al. 1983 ou Lambeck 1980	1.	$(1 + k'_2)$
	Munk & Mac Donald 1960	1.	$(1 + k')$
	Valeur numérique correspondante	1.	0.7

appelée partie pression pour les océans et l’atmosphère; notée avec un exposant p) et (ii) une partie mouvement (aussi appelée partie vent ou courant pour l’atmosphère et les océans; notée avec un exposant v). On écrit donc la fonction d’excitation équatoriale χ comme : $\chi = \chi_1 + i \chi_2$, et on sépare les parties *matière* et *mouvement* : $\chi = \chi^p + \chi^v$. De même, la fonction d’excitation axiale s’écrit : $\chi_3 = \chi_3^p + \chi_3^v$. On a ainsi d’après les équations (1.20)-(1.25) :

$$\begin{aligned} \chi^p &= \chi_1^p + i \chi_2^p = \frac{c}{C - A} & \chi_3^p &= \frac{c_{33}}{C} \\ \chi^v &= \chi_1^v + i \chi_2^v = \frac{h}{\Omega (C - A)} & \chi_3^v &= \frac{h_3}{C \Omega} \end{aligned} \quad (1.32)$$

Le mouvement p du pôle (CIP) peut être relié à m (Brzeziński et Capitaine 1993) de la manière suivante (voir aussi §1.4) :

$$m = p - \frac{i}{\Omega} \dot{p} \quad (1.33)$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$\begin{aligned} i \frac{\dot{m}}{\sigma_r} + m &= \frac{i}{\sigma_r} \frac{d}{dt} \left(p - \frac{i}{\Omega} \dot{p} \right) + \left(p - \frac{i}{\Omega} \dot{p} \right) \\ &= \left(p + \frac{i}{\sigma_r} \dot{p} \right) - \frac{i}{\Omega} \frac{d}{dt} \left(p + \frac{i}{\sigma_r} \dot{p} \right) \end{aligned} \quad (1.34)$$

D’après les équations (1.18) et (1.30), on peut alors écrire :

$$\chi = p + \frac{i}{\sigma_r} \dot{p} \quad (1.35)$$

TAB. 1.2 – Valeurs numériques utilisées dans cette étude : les trois paramètres (appelés ” *Autres facteurs*”) ont été calculés avec des valeurs de k_2 et k_0 issues de IAG 1999 (Groten 1999) et de k'_2 issu des IERS Conventions 2003.

Moment principal d’inertie axial du manteau terrestre	C_m	7.0400 $\times 10^{37}$ kg m ²	IAG 1999
Moment principal d’inertie équatorial du manteau terrestre	A_m	7.0165 $\times 10^{37}$ kg m ²	IAG 1999
Moment principal d’inertie axial de la Terre	C	8.0365 $\times 10^{37}$ kg m ²	IAG 1999
Moment principal d’inertie équatorial de la Terre	A	8.0101 $\times 10^{37}$ kg m ²	IAG 1999
Nombres de Love de degré 2	k_2	0.3	IAG 1999
	k	0.29	Munk & Mac Donald 1960
	k_2	0.285	Barnes et al. 1983
Nombre de Love séculaire	k_0	0.9383	IAG 1999
	$k_s = k_f$	0.96	Munk & Mac Donald 1960
	k_0	0.942	Barnes et al. 1983
Nombre de Love * de déformation de degré 2	k'_2	-0.3075	IERS 2003
	k'	-0.30	Munk & Mac Donald 1960
	k'_2	-0.30	Barnes et al. 1983
Autres facteurs	$(1 + k'_2)$	0.6925	
	$\frac{k_0}{k_0 - k_2}$	1.47	
	$(1 + k'_2) \frac{k_0}{k_0 - k_2}$	1.02 \simeq 1	
Vitesse de rotation moyenne de la Terre	Ω	7.292115 $\times 10^{-5}$ rad s ⁻¹	IAG 1999
Pulsation d’Euler	$\sigma_r = \frac{C - A}{A} \Omega$	Période de 305 jours	
Pulsation de Chandler	σ_0	Période de 433 jours	Vicente & Wilson 1997

(*) Nombres de Love limités à leur partie réelle.

Cependant, comme nous l'avons vu précédemment, il nous faut considérer les effets des déformations rotationnelles, et en considérant le système Terre-Atmosphère-Océans, les couches fluides exercent un effet de surcharge sur la croûte terrestre. Par conséquent, Eq. (1.35) devient :

$$\chi_{eff} = p + \frac{i}{\sigma_0} \dot{p} \quad (1.36)$$

où σ_0 est la pulsation de Chandler déjà définie précédemment et :

$$\chi_{eff} = \frac{k_0}{k_0 - k_2} \chi^v + \frac{k_0}{k_0 - k_2} [(1 + k'_2) \chi^p_{Atm, Oceans} + \chi^p_{Autre Origine}] \quad (1.37)$$

D'après les équations (1.36) et (1.37), on aboutit à :

$$p + \frac{i}{\sigma_0} \dot{p} = \frac{k_0}{k_0 - k_2} \chi^v + \frac{k_0}{k_0 - k_2} [(1 + k'_2) \chi^p_{Atm, Oceans} + \chi^p_{Autre Origine}] \quad (1.38)$$

où l'on a supposé que les autres origines des fonctions d'excitation (à part les océans et l'atmosphère) n'engendraient pas d'effets de surcharge sur la croûte terrestre. Comme de plus on considère que le manteau est découplé du noyau, d'après Eq. (1.32), on a :

$$\begin{aligned} p + \frac{i}{\sigma_0} \dot{p} &= \frac{k_0}{k_0 - k_2} \frac{h}{\Omega (C_m - A_m)} \\ &\quad + \frac{k_0}{k_0 - k_2} \left[(1 + k'_2) \frac{c^{Atm, Oceans}}{C_m - A_m} + \frac{c^{Autre Origine}}{C_m - A_m} \right] \\ &= 1.43 \frac{h}{\Omega (C_m - A_m)} + \frac{c^{Atm, Oceans}}{C_m - A_m} + 1.43 \frac{c^{Autre Origine}}{C_m - A_m} \end{aligned} \quad (1.39)$$

si on prend les valeurs de Barnes et al. 1983 (voir Table 1.1).

Notons qu'en pratique c'est la valeur observationnelle de la pulsation de Chandler qui est utilisée (correspondant à une période dans le référentiel terrestre égale à 433 jours solaires moyens).

TAB. 1.3 – Caractéristiques des fonctions d'excitation des couches fluides de la Terre (atmosphère et océans) : paramètres entrant en jeu.

	Atmosphère	Océans
Partie <i>matière</i>	Pression atmosphérique	Hauteur d'eau (pression au fond des océans)
Partie <i>mouvement</i>	Vents	Courants marins

1.2.3 Modèle de Terre formée de couches : Couplages aux frontières

Considérons maintenant l'existence dans la Terre d'un noyau fluide. On peut procéder de deux manières. Soit on suppose que le manteau et le noyau sont totalement découplés, ce qui est le cas si le noyau est sphérique et s'il n'y a pas de dissipation à la frontière noyau/manteau. Dans ce cas, les équations de Liouville suffisent pour décrire le phénomène, en limitant les termes de la fonction d'excitation au manteau seul (comme ce qui a été effectué au paragraphe précédent). Soit on suppose qu'il existe un couplage entre noyau et manteau, ce qui est effectivement le cas en réalité. Il faut alors ajouter aux équations établies dans le paragraphe précédent celles relatives au noyau fluide.

On doit donc considérer la déformation élastico-visqueuse du manteau terrestre, en plus les phénomènes océaniques, atmosphériques et saisonniers à la surface terrestre, ainsi que la présence d'un noyau fluide. Il y a donc un couplage inertiel dû à l'ellipticité de la frontière noyau-manteau, ainsi qu'un couplage dissipatif se produisant dans la croûte de séparation des deux milieux.

Les équations relatives au noyau fluide sont du même type que précédemment, mis à part le fait que les fonctions d'excitation obtenues pour ce système sont décomposées en trois parties :

- ψ_f : relative au noyau seul,
- ψ_m : relative au manteau seul,
- ψ_t : due au couplage exercé sur le noyau par le manteau.

Dans le cas d'un modèle de Terre déformable possédant un manteau élastique et un noyau fluide, les fonctions d'excitation comportent comme précédemment les effets de la déformation rotationnelle. En transformant les équations, on parle alors de fonctions d'excitation effectives et on a (notons que nous détaillons ces équations en omettant le couple extérieur luni-solaire) :

$$\begin{aligned} i \frac{\dot{m}}{\sigma_0} + m &= \chi^{eff} - \frac{i}{\Omega} \dot{\chi}^{eff} \\ m_3 &= -\chi_3^{eff} \end{aligned} \quad (1.40)$$

où l'on a (Sasao et al. 1980) :

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{A}{A_m} \left(1 - \frac{k_2}{k_0} \right) \sigma_r \\ \chi^{p,eff} &= \left(1 + \frac{A_f}{A} \frac{\sigma_{FCN} + \Omega}{\sigma - \sigma_{FCN}} \right) \chi^p \\ \chi^{v,eff} &= \frac{1}{1 - \frac{k_2}{k_0}} \left(1 + \frac{A_f}{A} \frac{\sigma_{FCN} + \Omega}{\sigma - \sigma_{FCN}} \right) \chi^v \end{aligned} \quad (1.41)$$

où A_f est le moment d'inertie du noyau, σ_{FCN} est la fréquence de résonance associée à la nutation libre du noyau et σ est la fréquence d'excitation.

1.3 Paramétrisation de la rotation terrestre

Nous venons de rappeler les équations dynamiques de la rotation terrestre, dépendant du vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$. Cependant en pratique nous ne mesurons pas $\vec{\omega}$. L'orientation terrestre, représentant le passage d'un repère céleste à un repère terrestre, pourrait être exprimée à l'aide de trois angles (les angles d'Euler, voir Annexe C). Mais afin de bénéficier d'une bonne précision sur la rotation de la Terre, il faudrait déterminer ces 3 angles très fréquemment (car la Terre tourne relativement rapidement). De plus, la détermination classique de la rotation terrestre nous conduit à séparer orientation de l'axe de rotation dans la Terre et dans l'espace. L'approche dynamique de la rotation de la Terre présentée précédemment nous a en effet permis de séparer les variations d'orientation dans l'espace et dans la Terre, puis le mouvement de rotation diurne. Les mesures géodésiques spatiales utilisent donc un jeu de 5 paramètres, appelés les paramètres d'orientation terrestre (EOP, *Earth Orientation Parameters*). Les observations relatives à l'orientation de la Terre consistent en des perturbations par rapport à une rotation uniforme, donnée par des modèles, à des intervalles de temps supérieurs ou égaux à un jour (pour les déterminations routinières et non intensives).

Nous allons détailler la modélisation et la paramétrisation de l'orientation de la Terre dans l'espace, ainsi que les mesures géodésiques nous permettant d'obtenir des observations relatives à la rotation de la Terre. Mais nous allons commencer par définir le CIP (Celestial Intermediate Pole) auquel sont conventionnellement référées les observations de variations de rotation terrestre (relatives aux EOP).

1.3.1 Définition du pôle céleste intermédiaire (CIP)

Selon la Résolution B1.7 de l'UAI (Manchester, Août 2000), le Pôle Céleste Intermédiaire (CIP, *Celestial Intermediate Pole*) est un pôle intermédiaire proche du pôle instantané de rotation. Par convention, il permet de séparer en deux composantes le mouvement du pôle de l'ITRS dans le système de référence céleste géocentrique (GCRS) :

- **Le mouvement céleste du CIP (précession-nutation)**, comprenant tous les termes ayant des périodes plus grandes que 2 jours dans le GCRS (i.e. des fréquences comprises entre -0.5 cycles par jour sidéral (cpsd) et $+0.5$ cpsd),

- **Le mouvement terrestre du CIP (ou mouvement du pôle)**, comprenant tous les termes en dehors de la bande rétrograde diurne dans le système de référence terrestre (i.e. fréquences plus petites que -1.5 cpsd ou plus grandes que -0.5 cpsd) (voir Fig 1.2, issue des IERS Conventions 2003 chap.5).

Le CIP correspond à 1 mas près (au maximum) au pôle de rotation moyen diurne (voir Fig. 1.3). C'est une définition plus précise du CEP (CEP, *Celestial Ephemeris Pole*), relatif à la théorie UAI 1980 de la nutation. Cette définition prend en considération les variations diurnes et subdiurnes des EOP, de manière à séparer clairement les courtes et longues périodes dans la Terre.

Le CIP est défini à partir de l'axe du repère céleste de référence (OZ) par le modèle de précession-nutation UAI 2000A (adopté par l'UAI en 2000) et les corrections ($d\psi$, $d\epsilon$) provenant des observations (appelées *Celestial Poles Offsets*, i.e. erreurs du modèle de précession-nutation). Le CIP ne diffère alors plus du pôle géographique G que par (i) le

mouvement classique du pôle (périodes supérieures à 2 jours dans la Terre, les autres étant comptées dans l'espace), (ii) les termes de nutation de l'axe de figure de période inférieure à 2 jours dans l'espace et que l'on compte donc dans la Terre, et (iii) les termes diurnes et sub-diurnes du mouvement du pôle induits par les marées océaniques et des contributions atmosphériques (voir Fig. 1.4).

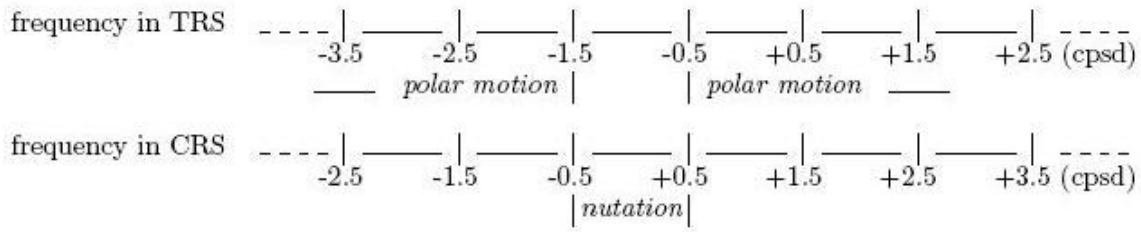


FIG. 1.2 – Représentation schématique de la bande de fréquence considérée pour la définition du CIP (source IERS Conventions 2003).

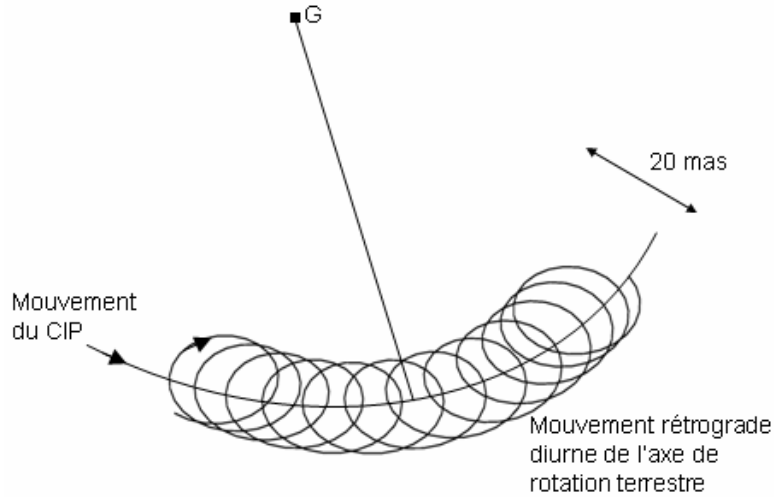


FIG. 1.3 – Mouvement du pôle céleste intermédiaire (CIP) dans le repère terrestre, dont le troisième axe est l'axe du pôle géographique G , comparé au mouvement rétrograde diurne du pôle de rotation dans la Terre.

1.3.2 La rotation terrestre, passage d'un système de référence céleste à un système de référence terrestre : définition des paramètres d'orientation terrestre (EOP)

L'orientation terrestre peut être définie à chaque instant comme le passage d'un système terrestre (TRS = "Terrestrial Reference System") à un système céleste (CRS

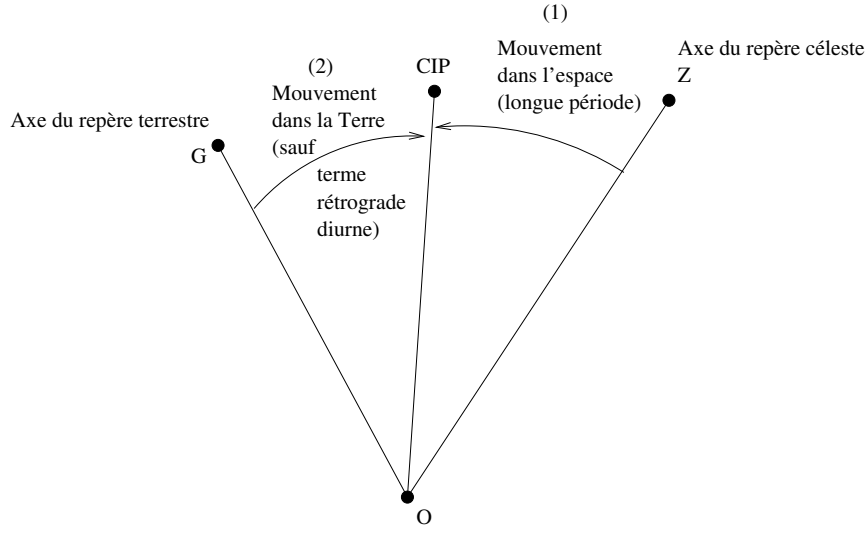


FIG. 1.4 – Pôle céleste intermédiaire (CIP) défini par rapport (i) à une origine OZ inertielle (par exemple, une radio-source) et (ii) à une origine Oz terrestre (réalisée par le pôle géographique G). (1) correspond au modèle de précession-nutation ainsi qu’aux écarts observés ($d\psi, d\epsilon$) à ce modèle. (2) correspond au mouvement du pôle (périodes supérieures à 2 jours dans la Terre), aux termes de nutation de l’axe de figure de période inférieure à 2 jours dans l’espace et que l’on compte donc dans la Terre, et aux termes diurnes et sub-diurnes du mouvement du pôle induits par les marées océaniques et des contributions atmosphériques.

= "Celestial Reference System") et peut être modélisée grâce à la matrice de rotation \overline{M} suivante :

$$\begin{aligned} [CRS] &= \overline{M} [TRS] \\ &= \overline{PN}(t) \overline{R}(t) \overline{W}(t) [TRS] \end{aligned} \quad (1.42)$$

Cette matrice de rotation \overline{M} permet donc de passer du système fixe terrestre au système fixe céleste. Elle se décompose suivant plusieurs rotations successives. Notons que nous nous sommes basés ici sur l’ancienne représentation (IERS Conventions 1996), et non la nouvelle représentation (IERS Conventions 2003) qui utilise une forme différente de la matrice $\overline{PN}(t)$:

$$[CRS] = \overline{Q}(t) \overline{R}(t) \overline{W}(t) [TRS] \quad (1.43)$$

Cependant, nous utiliserons par la suite (Chapitres 3 et 11) la modélisation (1.42), c’est pourquoi nous la développons ici.

Mouvement du pôle

La matrice \overline{W} de rotation permet de passer du repère terrestre, dont le troisième axe est l’axe du pôle géographique G , au repère intermédiaire, dont le troisième axe est le CIP (voir Fig. 1.4). Le plan fondamental de ce repère intermédiaire est l’équateur vrai de la date. Les coordonnées du pôle céleste intermédiaire (CIP) dans le repère terrestre sont : x_p et y_p . La matrice \overline{W} se décompose alors en deux rotations :

$$\overline{W}(t) = \mathfrak{R}_2(x_p) \mathfrak{R}_1(y_p) \quad (1.44)$$

Les paramètres x_p et y_p (coordonnées équatoriales) sont deux des 5 EOP (voir Fig. 1.5), qui caractérisent le mouvement de l'axe de rotation dans la Terre (car le CIP et l'axe de rotation terrestre sont proches). On appelle $\mathbf{p} = \mathbf{x}_p - i \mathbf{y}_p$ le **mouvement du pôle**, dans le repère terrestre.

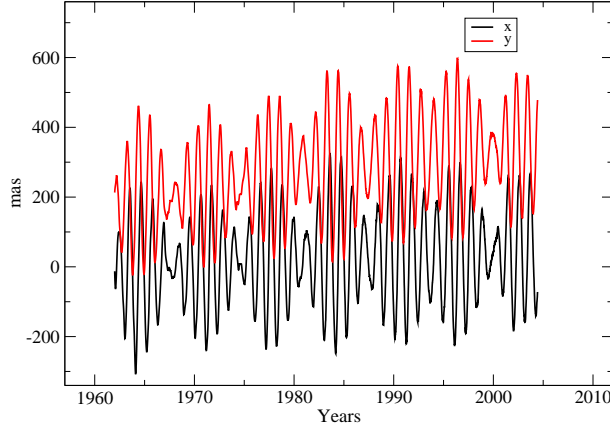


FIG. 1.5 – Composantes du mouvement du pôle : (x_p, y_p) .

Angle de rotation terrestre

La matrice \overline{R} de rotation permet de passer du repère tournant dont le premier axe est dans le plan méridien de Greenwich, au repère non tournant se rapportant à l'équinoxe vrai de la date γ_v (en restant sur le plan fondamental de l'équateur vrai de la date) :

$$\overline{R}(t) = \mathfrak{R}_3(-GST) \quad (1.45)$$

sachant que GST est le temps sidéral à Greenwich (IERS Conventions 1996).

Les variations de la vitesse angulaire de rotation sont généralement représentées (i) par les changements correspondants dans la durée du jour (universel) par rapport à un jour de 86400 s du SI (notés $\Delta(LOD)$; voir Fig. 1.6), ou bien (ii) par la différence accumulée entre UT1 et TAI (i.e. **UT1-TAI**), ou encore dorénavant (iii) par la différence correspondante dans l'angle de rotation terrestre (ERA ou GST).

La nouvelle définition de UT1 adoptée par la Résolution B1.8 de l'UAI utilise l'origine non-tournante sur l'équateur mobile (Guinot 1979). Cette origine a été choisie pour refléter le plus simplement possible la rotation de la Terre par rapport à un repère céleste tout en étant en continuité avec la définition historique de UT. Elle a l'avantage, d'une part, de rendre les concepts plus clairs, et d'autre part, de simplifier les calculs.

Précession-nutation

La matrice de nutation \overline{N} permet de passer du repère équatorial vrai de la date (dont le point origine est l'équinoxe vrai de la date γ_v) au repère équatorial moyen de la date (dont le point origine est l'équinoxe moyen de la date γ_m) (voir Fig. 1.7) :

$$\overline{N} = \mathfrak{R}_1(-\epsilon_A) \mathfrak{R}_3(\Delta\psi) \mathfrak{R}_1(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \quad (1.46)$$

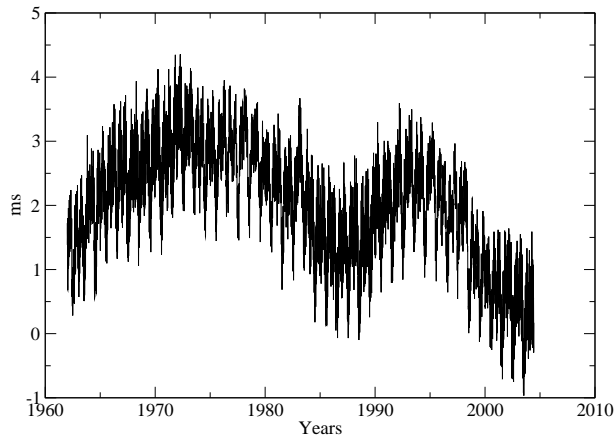


FIG. 1.6 – Excès de la longueur du jour : $\Delta(LOD)$.

où ϵ_A est l'obliquité de l'écliptique moyen de la date, $\Delta\psi$ correspond à la nutation en longitude rapportée à l'écliptique de la date (qui nous donne l'équinoxe vrai γ_v), et enfin $\Delta\epsilon$ correspond à la nutation en obliquité rapportée à l'écliptique de la date (qui nous donne l'équateur vrai de la date). On peut relier ces deux derniers angles aux EOP ($d\psi, d\epsilon$) par : $\delta(\Delta\psi) = d\psi$ et $\delta(\Delta\epsilon) = d\epsilon$.

Les écarts au pôle céleste $d\psi$ et $d\epsilon$ donnent les écarts respectivement en longitude et en obliquité du pôle céleste intermédiaire (CIP) par rapport à sa position définie par les modèles de précession-nutation conventionnels de l'UAI. Les variations observées reflètent donc la différence entre le mouvement céleste du pôle observé et celui prédit par les modèles de précession et de nutation conventionnels. Elles comportent une partie séculaire et des termes périodiques (principalement de période 18.6 ans, 1 an, 0.5 an et 14 jours quand ces écarts sont rapportés au modèle UAI 1980 ; voir Fig. 1.8).

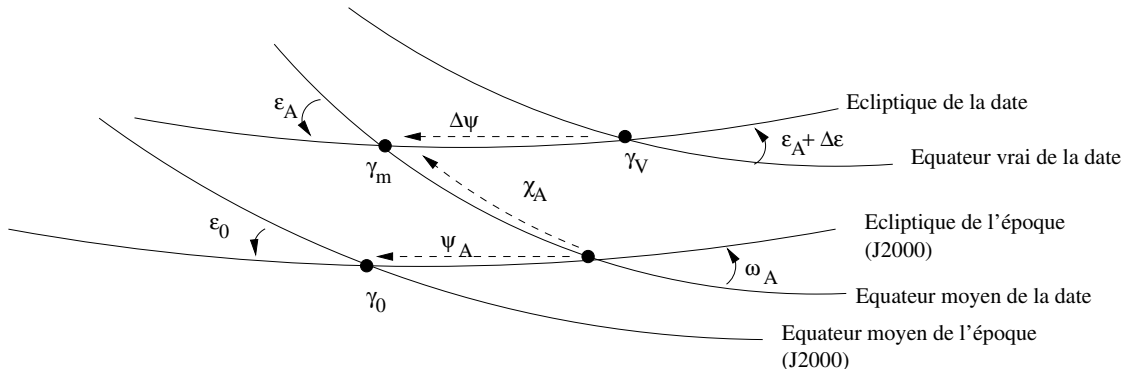


FIG. 1.7 – Passage du repère équatorial vrai de la date au repère équatorial moyen de la date, puis au repère équatorial moyen de l'époque J2000. On peut noter que γ_0 est l'équinoxe moyen de l'époque, γ_m l'équinoxe moyen de la date et γ_v l'équinoxe vrai de la date.

Nous avons obtenu, après les étapes précédentes, l'équinoxe moyen de la date (γ_m). Donc enfin, la matrice \underline{P} de précession permet de passer du repère équatorial moyen de la date, au repère équatorial moyen de l'époque (i.e. J2000 ; dont le point origine est

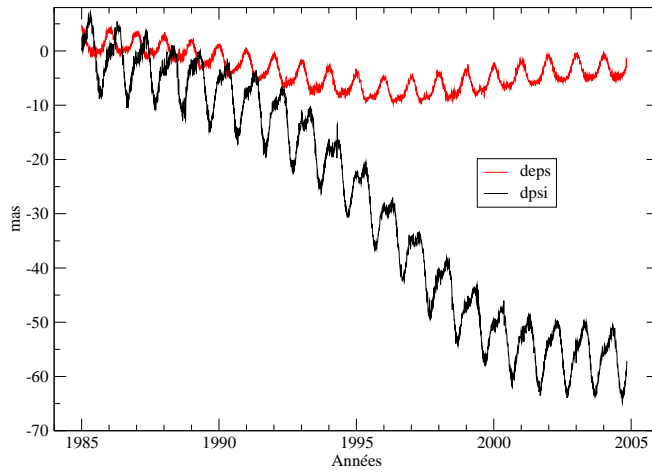


FIG. 1.8 – Ecart au pôle céleste : $(d\psi, d\epsilon)$ sont les écarts entre les mesures VLBI de la précession-nutation et le modèle théorique (ici, UAI 1980).

l'équinoxe moyen de l'époque γ_0) (voir Fig. 1.7) :

$$\underline{\overline{P}} = \mathcal{R}_1(-\epsilon_0) \mathcal{R}_3(\psi_A) \mathcal{R}_1(\omega_A) \mathcal{R}_3(-\chi_A) \quad (1.47)$$

où ϵ_0 est l'obliquité de l'écliptique à l'époque J2000, ψ_A correspond à l'angle de précession de l'équinoxe à l'époque J2000, ω_A est l'obliquité entre le plan équatorial moyen de la date et l'écliptique de l'époque et χ_A est l'angle de précession planétaire.

Les développements polynomiaux conventionnels adoptés par l'UAI pour les angles de précession-nutation issus du modèle UAI 1976 (Lieske et al. 1977) sont les suivants :

$$\begin{aligned} \psi_A &= 5038.7784'' t - 1.07259'' t^2 - 0.001147'' t^3 \\ \omega_A &= \epsilon_0 + 0.05127'' t^2 - 0.007726'' t^3 \\ \epsilon_A &= \epsilon_0 - 46.8150'' t - 0.00059'' t^2 + 0.001813'' t^3 \\ \chi_A &= 10.5526'' t - 2.38064'' t^2 - 0.001125'' t^3 \\ \epsilon_0 &= 84381.448'' \end{aligned} \quad (1.48)$$

où t est exprimé en siècles juliens depuis J2000. Les développements polynomiaux compatibles avec le modèle UAI 2000A (Mathews et al. 2002) de précession-nutation sont basés sur les précédents, considérant les corrections suivantes :

$$\begin{aligned} d\psi_A &= (-0.29965 \pm 0.00040)''/\text{cy} \\ d\omega_A &= (-0.02524 \pm 0.00010)''/\text{cy} \end{aligned} \quad (1.49)$$

Nous utiliserons la modélisation précédente de la précession-nutation dans les chapitres 3 et 11. Cependant, la Résolution B1.8 de l'UAI (Manchester, Août 2000) recommande que la transformation entre le GCRS et l'ITRS soit spécifiée par la position du CIP dans

le GCRS, la position du CIP dans l'ITRS et l'Angle de rotation de la Terre. Cela amène à utiliser, à la place des quantités classiques de précession-nutation, les cosinus directeurs (notés X et Y) du CIP dans le GCRS (Capitaine 1990). Ils expriment directement la direction de l'axe du pôle intermédiaire sur la sphère céleste, sous forme très similaire à celle exprimant usuellement la direction de cet axe dans la Terre.

Paramètres d'Orientation Terrestres (EOP)

Nous pouvons donc noter que la modélisation pratique de la rotation terrestre utilise 5 paramètres qui caractérisent trois types de variations de la rotation de la Terre :

- x_p et y_p définissent le mouvement du pôle (CIP), et caractérisent donc le mouvement de l'axe de rotation dans la Terre,
- $UT1 - TAI$ (relié à ERA ou GST) définit l'angle de rotation terrestre, et caractérise ainsi la vitesse de rotation de la Terre (ou bien $\Delta(LOD)$ qui est l'écart de la longueur du jour par rapport à 86400 s du SI),
- $d\psi$ et $d\epsilon$ (ou de façon équivalente dX et dY) sont les écarts au modèle de précession-nutation, et sont reliés au mouvement de l'axe de rotation dans l'espace (associés à un modèle de précession-nutation donné).

1.3.3 Méthodes spatiales géodésiques de détermination des paramètres d'orientation terrestre

Pour déterminer les 5 paramètres d'orientation de la Terre des techniques de géodésie spatiale de plus en plus précises sont utilisées (voir Table 1.4). Elles sont les suivantes :

- Télémétrie laser sur satellite (**SLR**) : La quantité observée est le *temps aller-retour* mis par une impulsion laser entre la station terrestre émettrice et le satellite (e.g. Starlette, Stella, Lageos1-2).
- Télémétrie laser sur la Lune (**LLR**) : La quantité observée est le *temps aller-retour* mis par un faisceau laser entre une station terrestre émettrice et des réflecteurs sur la Lune.
- Interférométrie à très longue base (**VLBI**) : On mesure le *retard* que met la même onde radio venant d'une source extragalactique pour arriver en deux radio-télescopes terrestres distincts et distants (le mouvement propre des objets pointés est considéré comme nul).
- Systèmes de positionnement global (**GPS**) : C'est un système d'au moins 24 satellites artificiels en orbite autour de la Terre, dont 4 à 8 sont observables en même temps (12 satellites observables instantanément au pôle). L'observable de base est la *différence de phase* entre l'horloge du satellite et celle du récepteur GPS au sol.
- Observations Doppler (**DORIS**) : La quantité observée est la *vitesse doppler* entre la station au sol et le satellite (vitesse radiale).

TAB. 1.4 – Techniques de géodésie permettant de déterminer les EOP.

<i>Techniques</i>		<i>Quantité observée</i>
VLBI		Ecart entre les temps d'arrivée à 2 antennes d'un signal radio émis par un quasar.
Satellites	Système GPS	Différence de phase entre l'horloge du satellite et celle du récepteur.
	Système DORIS	Vitesse radiale entre la station émettrice et le satellite (effet DOPPLER).
	Télémétrie laser	Temps aller-retour d'une impulsion laser entre une station émettrice-réceptrice et un satellite.
Laser-Lune		Temps aller-retour d'une impulsion laser entre une station émettrice-réceptrice et la Lune.
Astrométrie optique	Astrolabe de Danjon	Instant de passage d'une étoile à une distance zénithale donnée.
	Instrument méridien	Instant de passage d'une étoile au méridien du lieu.

De manière générale, ces observations brutes sont ensuite traitées en écrivant les **équations d'observation** de manière linéaire, reliant les observations et les paramètres d'un modèle, et en ajustant ces paramètres de manière à minimiser les écarts quadratiques entre observations et modèle (voir Annexe D).

Chacune des méthodes précédemment citées ne donne pas accès à tous les paramètres d'orientation terrestre. La Table 1.5 détaille quelle méthode donne accès à quel EOP. Ainsi, la méthode donnant accès au plus de paramètres d'orientation terrestre est le VLBI, dont les antennes sont dispersées tout autour du globe, et le GPS est très efficace afin de déterminer le mouvement du pôle.

TAB. 1.5 – Détermination opérationnelle des EOP par géodésie spatiale.

<i>Techniques</i>		<i>EOP fournis de façon opérationnelle</i>
VLBI		$x_p, y_p, UT1, d\psi$ et $d\epsilon$
Satellites	Système GPS	$x_p, y_p, \Delta(LOD), \dot{x}_p$ et \dot{y}_p
	Système DORIS	x_p, y_p et $\Delta(LOD)$
	Télémétrie laser	x_p, y_p et $\Delta(LOD)$
Laser-Lune		$UT1$

1.4 Lien entre les paramètres d'orientation terrestre et les composantes du vecteur instantané de rotation ($\vec{\omega}$)

Nous avons détaillé précédemment deux approches différentes afin d'appréhender la rotation de la Terre :

- Par l'utilisation des équations de Liouville et de l'axe instantané de rotation $\vec{\omega}$,
- Vue comme le passage du repère terrestre au repère céleste, avec l'utilisation de la matrice de passage $\underline{\overline{M}}$, dépendant des EOP.

La première approche, dynamique, était basée sur les composantes du vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$, alors que la deuxième, cinématique, était basée sur les EOP. Il s'agit donc maintenant de savoir relier ces composantes (m, m_3) aux EOP, afin de pouvoir établir les liens entre les coefficients variables du potentiel de gravité et la rotation terrestre (Chapitre 3).

Le vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$ peut s'écrire à partir de la matrice de passage M de la manière suivante (Kinoshita et al. 1979) :

$$\vec{\omega}_{TRF} = \underline{\overline{M}}^{-1} \dot{\underline{\overline{M}}} \quad (1.50)$$

qui équivaut à :

$$\begin{cases} m &= p + i \frac{\dot{p}}{\Omega} + O(p) \\ m_3 &= \overbrace{(UT1 - TAI)} \end{cases} \quad (1.51)$$

où $p = x_p - i y_p$ et :

$$\underline{\overline{M}} = \underline{\overline{PN}}(t) \underline{\overline{R}}(t) \underline{\overline{W}}(t) \quad (1.52)$$

où $\underline{\overline{W}}(t)$ est la matrice de mouvement du pôle dépendant de x_p et y_p , $\underline{\overline{R}}(t)$ est la matrice principale de rotation dépendant de $UT1$ et enfin, $\underline{\overline{PN}}(t)$ est la matrice de précession-nutation dépendant de $(d\psi, d\epsilon)$ (§1.3.2).

Par conséquent, grâce aux équations (1.51), on a (i) une relation entre les composantes équatoriales m de $\vec{\omega}$ dans la Terre et p du pôle (CIP) dans la Terre, puis (ii) une relation entre m_3 et $UT1 - TAI$.

1.5 Variations de l'orientation terrestre : Connaissances actuelles, Limitations et Progrès à faire

La rotation terrestre n'est pas uniforme. En effet, la vitesse de rotation terrestre varie, ainsi que la direction de l'axe de rotation dans l'espace ou dans la Terre. En d'autres termes, dans l'étude des variations de la rotation de la Terre, nous nous intéressons à :

- la durée du jour,
- l'orientation de l'axe de rotation.

Détaillons maintenant les connaissances actuelles de ces variations (se rapportant au §1.3.2 et à la résolution des équations d'Euler-Liouville pour une Terre réelle déformable), ainsi que les limitations rencontrées et les progrès pouvant être faits.

1.5.1 Variation de la vitesse de rotation terrestre

La variation de vitesse de rotation terrestre comprend une variation séculaire et des variations périodiques, provenant d'effets géophysiques (voir Table 1.6 et Fig. 1.9). Les différents termes mis en évidence, ainsi que leurs causes, sont les suivants :

- **Variation séculaire** : Provient de la dissipation d'énergie dans le phénomène des marées ; la Terre réagit avec un retard à l'attraction gravitationnelle exercée par la Lune (à cause de la friction agissant entre la Terre solide et les océans), le bourrelet équatorial terrestre est alors freiné par le couple mécanique exercé par la Lune.

- **Variations zonales** : Elles sont dûes aux variations de moment d'inertie C , causées par les déformations dues aux marées lunisolaires, et entraînant des variations de vitesse de rotation.

- **Termes saisonniers** : Provient des déplacements saisonniers de masses d'air (océan, atmosphère), dont environ 90% est dû aux déplacements atmosphériques (vents).

- **Variations décennales** : Elles sont supposées être dûes au couplage noyau-manteau, produisant des effets électromagnétiques, et entraînant des variations de vitesse de rotation.

- **Variations sub-diurnes** : Elles sont dûes aux marées océaniques et sont modélisées lorsque les mesures de variations de la longueur du jour n'ont pas une résolution temporelle assez fine.

Dans les dernières années, des progrès considérables ont été effectués dans la modélisation des effets atmosphériques et océaniques grâce aux divers centres de données (voir Tables 1.7 et 1.8). Les séries de moments cinétiques atmosphérique et océanique sont rendues disponibles dans le domaine public par le *Special Bureau for Atmosphere* (SBA) (Salstein et al. 1993) et par le *Special Bureau for Oceans* (SBO) de l'IERS.

Comme de plus les interactions de marées sont très bien modélisées, il est dorénavant possible de s'intéresser aux effets résiduels sur les variations de la vitesse de rotation terrestre : par exemple hydrologie, tremblements de terre, ou autres effets non encore modélisés. La contributions de ces derniers pourra être éventuelle étudiée grâce à la géodésie spatiale (et plus particulièrement aux variations du champ de gravité terrestre ; voir §2.4.3), permettant ainsi de compléter les modèles de la rotation de la Terre.

TAB. 1.6 – Variations de la vitesse de rotation terrestre : la partie *mouvement* des moments cinétiques atmosphérique et océanique influe plus que leur partie *matière* sur la vitesse de rotation de la Terre.

<i>Composante périodique observée</i>	<i>Cause</i>
Variation séculaire	Friction due à la dissipation d'énergie dans le phénomène de marées
Variations décennales	Cause non mise en évidence clairement ; Ne seraient pas dues aux couches fluides ; Effets électromagnétiques à la frontière noyau-manteau
Variations saisonnières : annuelle, semi-annuelle	Moment cinétique atmosphérique, Moment cinétique océanique
Variations zonales	Effet dû aux déformations de la Terre solide causées par les marées
Variations sub-diurnes	Effet dû aux déformations causées par les marées océaniques

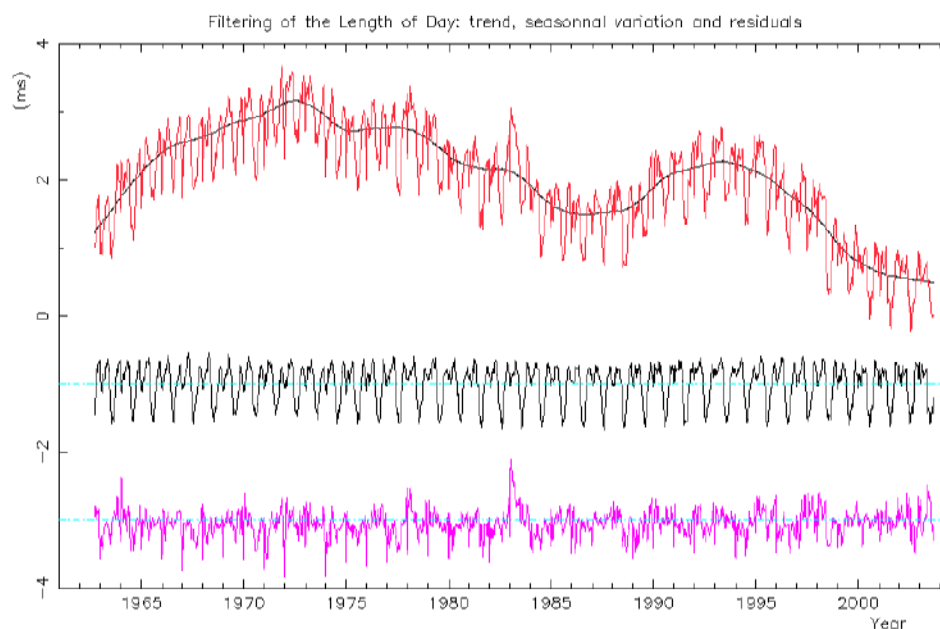


FIG. 1.9 – Les différentes composantes de la série de l'excès de la longueur du jour (LOD) : source IERS.

TAB. 1.7 – Modèles et données atmosphériques utilisés pour la modélisation des effets sur la rotation terrestre.

<i>Séries de moments cinétiques atmosphériques</i>	
Modèles de circulation atmosphérique contraints par des données de pression	
JMA	<i>Japanese Meteorological Agency</i>
UKMO	<i>United Kingdom Meteorological Office</i>
ECMWF	<i>European Center for Medium-range Weather Forecast</i>
NCEP	<i>National Centers for Environmental Prediction</i>
NCEP/NCAR	<i>National Centers for Environmental Prediction/ National Center for Atmospheric Research</i>

TAB. 1.8 – Modèles et données océaniques utilisés pour la modélisation des effets sur la rotation terrestre.

<i>Séries de moments cinétiques océaniques</i>		
Modèle de circulation océanique global forcée par un modèle atmosphérique		
Ponte et al. 1998	Johnson et al.1999	Gross 2003, 2004

1.5.2 Variation de l’axe de rotation dans la Terre

L’axe de rotation terrestre subit des variations dans la Terre caractérisées par le Mouvement du pôle. Nous pouvons les détailler (voir Table 1.9 et Fig. 1.10) :

- **Mouvement libre de Chandler** : Déplacement dans la Terre de l’axe instantané de rotation $\vec{\omega}$ par rapport à l’axe géographique \vec{OG} (voir Fig. 1.11). Il est dû au fait que l’axe de rotation terrestre diffère de l’axe d’inertie, ce qui entraîne que l’axe de rotation tourne autour de ce dernier tel une toupie (avec une période d’environ 14 mois). C’est un mouvement *quasi-périodique* d’amplitude moyenne de 150 à 200 mas (i.e. \simeq 450 à 600 cm sur Terre) (aussi appelé *Chandler Wobble* ou *Free nutation* (i.e. *Nutation Libre*), ou enfin *Eulerian Nutation*).

Il a été découvert par Euler, qui prédisait une oscillation de période 305 jours pour un modèle de Terre rigide. La Terre étant en fait non rigide, cette oscillation libre a une période de l’ordre de 430 jours. La période se trouve allongée par la déformation rotationnelle élastique et océanique de même période, et raccourcie par l’existence d’un noyau fluide (voir Fig. 1.12). Malgré le fait que ce mouvement soit libre, il ne disparaît pas avec le temps et est donc excité. Les causes de cette excitation ne sont pas encore bien établies, mais il semble que les variations de pression atmosphérique soient la source la plus importante dans l’excitation du terme de Chandler.

- **Terme annuel forcé** : Mouvement dans la Terre de l'axe instantané de rotation $\vec{\omega}$, de période annuelle. Il est principalement dû aux mouvements saisonniers des masses atmosphériques ou océaniques (dûs par exemple à l'échauffement du Soleil sur l'atmosphère) et aux vents zonaux.

- **Mouvement du pôle de périodes diurnes et sub-diurnes** : Mouvement dans la Terre de l'axe instantané de rotation, d'amplitude bien moindre que les phénomènes précédents. Termes dûs aux marées océaniques (notons que dans le cas du mouvement du CIP, ces termes proviennent aussi des nutations de l'axe de rotation dans l'espace de périodes inférieures à 2 jours dans l'espace et que l'on compte dans la Terre ; voir Fig. 1.4).

- **Dérive séculaire** : Dérive séculaire dans la Terre de l'axe instantané de rotation $\vec{\omega}$, causée par des déformations lentes de la croûte terrestre.

Les modèles atmosphérique et océanique abordés précédemment pour la modélisation des variations de la longueur du jour sont aussi utilisés pour expliquer le mouvement du pôle. Les principales limitations rencontrées de nos jours sont relatives aux méthodes classiques d'estimation des termes diurnes et sub-diurnes, dûs à des causes géophysiques. Nous aborderons ce sujet dans le §2.4.3, avec la contribution éventuelle de la géodésie spatiale (i.e. avec l'apport des variations du champ de gravité terrestre) à la modélisation de la rotation terrestre.

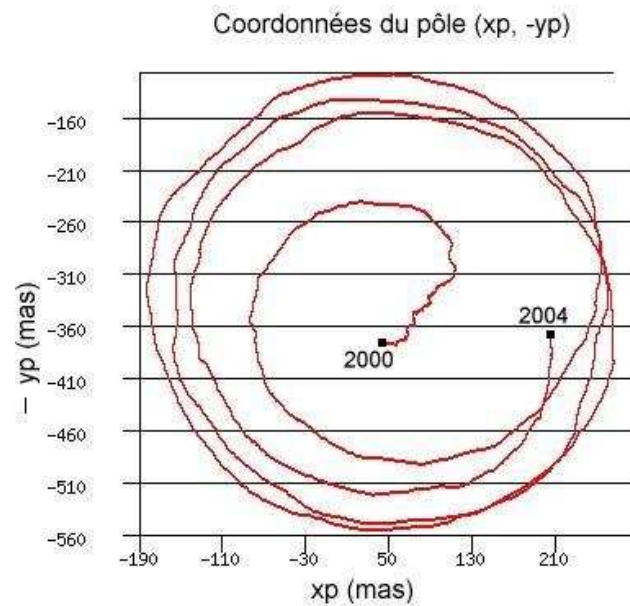


FIG. 1.10 – Mouvement du pôle : Mouvement équatorial de l'axe instantané de rotation dans la Terre (source IERS).

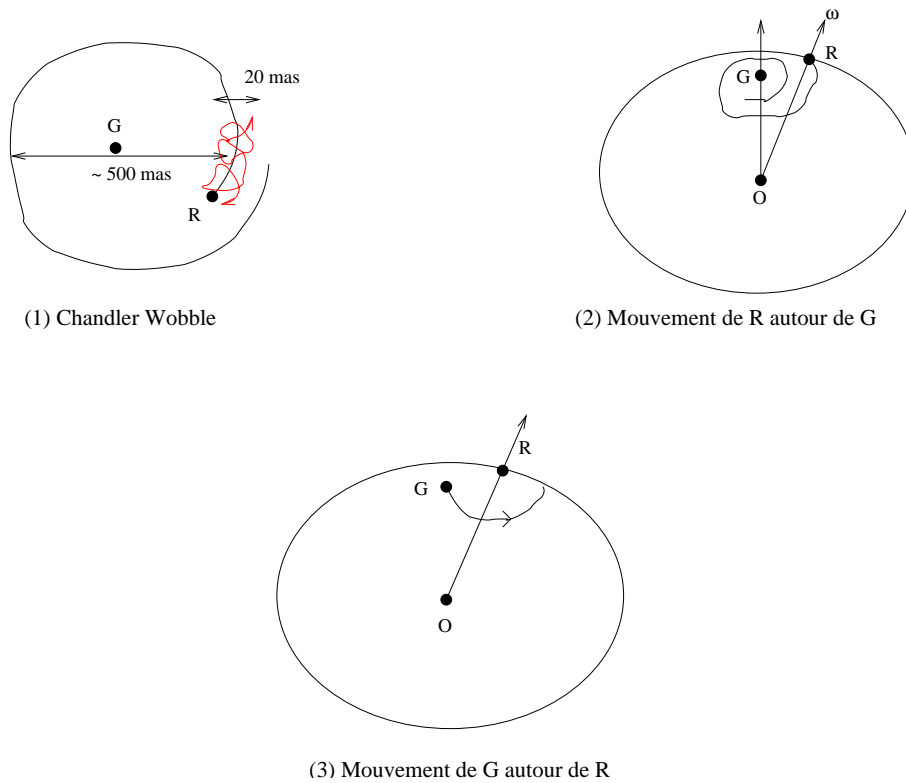


FIG. 1.11 – Mouvement libre de Chandler dans la Terre : (1) et (2) Mouvement du pôle instantané de rotation (matérialisé ici par le pôle R) autour du pôle géographique G. Les mouvements du pôle instantané de rotation autour du pôle géographique combinés à l'oscillation de Chandler (voir (1), termes d'effet 20 mas) sont dûs à la précession-nutation de l'axe instantané de rotation dans l'espace (correspondant aux termes d'Oppolzer : dans les modèles récents se rapportant au CIP, ils sont comptés dans les nutations). (3) Mouvement du pôle géographique G autour du pôle de rotation R, dû à la rotation diurne.

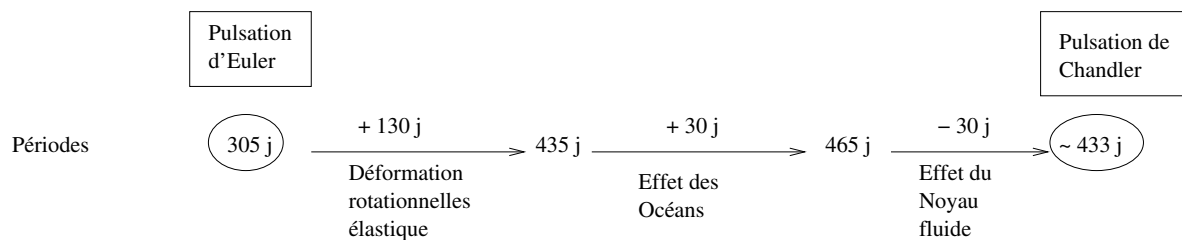


FIG. 1.12 – Oscillation de Chandler : valeur de la période correspondante différente suivant le modèle de Terre utilisé (voir par exemple Lambeck 1980).

TAB. 1.9 – Différentes composantes du mouvement du pôle (i.e. changement d’orientation de l’axe de rotation dans la Terre). La partie *matière* des moments cinétiques atmosphérique et océanique influe plus que leur partie *mouvement*.

<i>Composante périodique</i>	<i>Cause</i>
Oscillation de Chandler (période = 433 jours)	Mouvement libre de l’axe instantané de rotation : car l’axe de rotation est non confondu avec l’axe d’inertie ; Ne s’estompe cependant pas ; Doit être excité par des causes géophysiques ; A une amplitude variable dans le temps.
Terme annuel	Atmosphère (70 %), Océans
Dérive séculaire	Pas très bien expliqué : Rebond post-glaciaire ?

1.5.3 Variation de l’axe de rotation dans l’espace

L’orientation de l’axe de rotation terrestre varie dans l’espace, à cause des forçages extérieurs de la Lune, du Soleil et des autres planètes (dans une moindre mesure). Ce mouvement est le mouvement de Précession-Nutation, que nous allons détailler :

- **Précession** : Partie polynômiale (en fonction du temps) du mouvement de l’axe instantané de rotation $\vec{\omega}$ dans l’espace (plus particulièrement du CIP). Il provient de la partie constante, ainsi que de variations à très longues périodes, du moment extérieur Γ luni-solaire agissant sur la Terre.

L’axe de rotation a un mouvement lent cyclique dans l’espace autour du pôle de l’écliptique, dû au renflement équatorial terrestre et à l’inclinaison de la Terre par rapport à l’écliptique. En effet, le Soleil, la Lune et les autres planètes exercent une attraction gravitationnelle sur le bourrelet équatorial terrestre, ce qui crée un couple mécanique qui attire donc l’équateur terrestre vers l’écliptique. Du fait de la rotation terrestre diurne, ceci engendre un effet gyroscopique, c’est-à-dire le mouvement de précession : l’axe de rotation décrit un cône d’ouverture égale à l’angle entre le bourrelet équatorial et l’écliptique.

- **Nutation** : Partie périodique du mouvement de l’axe instantané de rotation $\vec{\omega}$ dans l’espace (et plus particulièrement du CIP), par rapport au plan de l’écliptique et en fonction du temps. Cette oscillation provient de la partie périodique du moment extérieur Γ luni-solaire. Newton avait prévu théoriquement les nutations annuelles et semi-annuelles, tandis que la nutation principale (i.e. nutation en 18.6 ans) a été découverte par Bradley, grâce à des observations.

Appelée aussi *Forced Nutation*, c’est une perturbation périodique du mouvement de précession : oscillations de l’axe instantané de rotation dans l’espace, dues aux irrégularités des mouvements terrestres et lunaires, car leur position varie périodiquement au cours du temps.

La précision de la modélisation de la précession-nutation est aujourd’hui limitée par

la durée des séries d'écart aux pôles célestes, fournies par la technique VLBI (20 ans de mesures). Ceci ne permet d'apporter aucun élément d'information sur le terme en t^2 de l'expression de l'angle de précession ψ_A , non séparable du terme en t encore pour de nombreuses années. Nous aborderons ce problème dans le §2.4.3, afin de déterminer si les variations du champ de gravité peuvent apporter des éléments de réponse.

1.6 Conclusion

Nous avons développé les équations de la rotation terrestre, pour un corps rigide ou bien une Terre déformable (éventuellement avec différentes couches), provenant du *théorème du Moment Cinétique*, appelées équations d'Euler-Liouville. D'autre part, nous avons aussi détaillé dans ce chapitre la modélisation de la rotation de la Terre, pouvant être vue comme le passage du repère céleste au repère terrestre. Ces équations font intervenir la matrice de rotation \overline{M} ainsi que les 5 paramètres d'orientation terrestre (EOP), obtenus grâce à des mesures astrométriques et de géodésie spatiale. Ces paramètres se rapportent au pôle céleste intermédiaire (CIP), qui reste toujours proche du pôle instantané de rotation.

Puis nous avons montré les liens entre ces deux modélisations de la rotation de la Terre, permettant de relier le vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$ aux paramètres d'orientation terrestres (voir Eq. (1.51)), ce qui nous sera utile au Chapitre 3.

La rotation de la Terre peut donc être vue comme l'étude des variations (i) de l'axe de rotation dans la Terre (§1.5.2) ou dans l'espace (§1.5.3), ainsi que (ii) de la vitesse de rotation terrestre (§1.5.1). Nous avons détaillé les différentes composantes de ces variations intervenant de manière séculaire ou périodique. La modélisation de la rotation terrestre est de nos jours limitée par les effets géophysiques non encore modélisés (hydrologie, tremblements de terre, mouvements de Terre solide, ...) et nous nous attacherons dans la suite de cette thèse à déterminer si les variations du champ de gravité terrestre peuvent apporter des éléments de réponse complémentaires.

Nous allons détailler maintenant le champ de gravité terrestre, étudié en géodésie et qui est soumis aux distributions de masses dans la Terre.

Chapitre 2

Champ de gravité terrestre

2.1 Introduction

La force de pesanteur terrestre est le phénomène physique fondamental régissant la forme moyenne de la Terre. Cette force attractive résulte de la force de gravitation terrestre ainsi que de la force centrifuge induite par la rotation terrestre :

$$\vec{F}_{\text{pesanteur}} = \vec{F}_{\text{centrifuge}} + \vec{F}_{\text{gravité}} \quad (2.1)$$

La force de gravité terrestre, définie par l'existence d'une masse pour le corps Terre, peut être caractérisée par le champ de gravité terrestre. Ce dernier est la donnée de l'accélération de gravité en tous points terrestres.

Une surface de niveau de la pesanteur est une surface normale en tout point à la force de pesanteur (voir Fig. 2.1). Ainsi, comme nous pouvons écrire que la force de pesanteur dérive d'un potentiel U : $\vec{F} \propto \vec{\nabla}U$, une surface de niveau de la pesanteur est alors une surface équipotentielle. Ainsi, on appelle géoïde la surface équipotentielle (ou de niveau) du champ de pesanteur coïncidant avec la surface moyenne du niveau des mers, qui se prolonge sous les continents par la condition de rester normale à toutes les lignes de force de la pesanteur. Autrement dit, le géoïde est la forme qu'aurait la Terre si elle était entièrement recouverte d'océans au repos. L'altitude terrestre est définie à partir de ce géoïde. Ce dernier étant en tout point normal à la force de pesanteur, et cette force variant du fait de la répartition hétérogène des masses à l'intérieur de la Terre, la surface des mers n'est pas lisse, mais ondulée. La surface océanique est en ce sens, aux échelles spatiales les plus courtes (10-500 km), la réplique du relief du fond des océans. Et plus globalement, on peut dire que la variation du géoïde reflète directement la répartition de matière à l'intérieur de la Terre ainsi que les anomalies du relief.

La détermination du champ de gravité terrestre nous informe donc sur la répartition hétérogène des masses dans la Terre : il nous donne des indices sur la structure interne terrestre. La connaissance de ce champ de gravité est aussi nécessaire pour l'étude du positionnement des satellites artificiels orbitant autour de la Terre. En effet, ces derniers sont soumis au champ gravitationnel terrestre et auront des variations de position liées notamment aux variations de ce champ.

Nous allons détailler comment le champ de gravité terrestre est modélisé en géodésie spatiale (§2.2), puis nous expliquerons comment les coefficients de Stokes caractérisant ce champ sont déterminés en pratique (§2.3). Nous détaillerons enfin les connaissances actuelles sur les variations du champ de gravité, ainsi que les implications sur la rotation terrestre (§2.4).

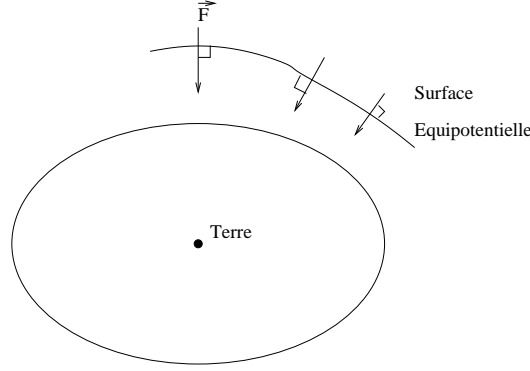


FIG. 2.1 – Surface de niveau du champ de pesanteur, en tout point normale à cette force : surface équipotentielle.

2.2 Modélisation en harmoniques sphériques

Pour la détermination de la force gravitationnelle terrestre \vec{g} , on utilise le potentiel gravitationnel U duquel elle dérive, et qui est défini par :

$$\vec{g} = \nabla U \quad (2.2)$$

Il est modélisé sur la sphère grâce aux harmoniques sphériques (voir Fig. 2.2) de la manière suivante (voir par exemple Lambeck 1988) :

$$U(r, \phi, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_e}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \phi) \quad (2.3)$$

où r est la distance géocentrique, ϕ la latitude et λ la longitude du point auquel on détermine le potentiel ; G est la constante gravitationnelle, R_e le rayon équatorial moyen terrestre et M la masse de la Terre ; C_{nm} et S_{nm} sont les coefficients de Stokes, définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned} C_{nm} &= \frac{1}{MR_e^n} (2 - \delta_{0m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_M r^n P_{nm}(\sin \phi) \cos(m\lambda) dM \\ S_{nm} &= \frac{1}{MR_e^n} (2 - \delta_{0m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_M r^n P_{nm}(\sin \phi) \sin(m\lambda) dM \end{aligned} \quad (2.4)$$

où (r, ϕ, λ) sont les coordonnées de l'élément dM et les $P_{nm}(\sin \phi)$ sont les polynômes de Legendre (voir Table 2.1). En pratique, on utilise les coefficients de Stokes normalisés, définis de la manière suivante :

$$C_{nm} = \beta_{nm} \bar{C}_{nm} \quad S_{nm} = \beta_{nm} \bar{S}_{nm} \quad (2.5)$$

où le facteur β_{nm} de normalisation est défini de la manière suivante (voir Table 2.2) :

$$\beta_{nm}^2 = (2 - \delta_{0m})(2n + 1) \frac{(n - m)!}{(n + m)!} \quad (2.6)$$

Une telle utilisation des coefficients normalisés s'explique afin de remédier à l'augmentation très rapide du dénominateur $(n + m)!$ dans l'équation (2.4), lorsqu'on monte en degré et en ordre dans le développement harmonique.

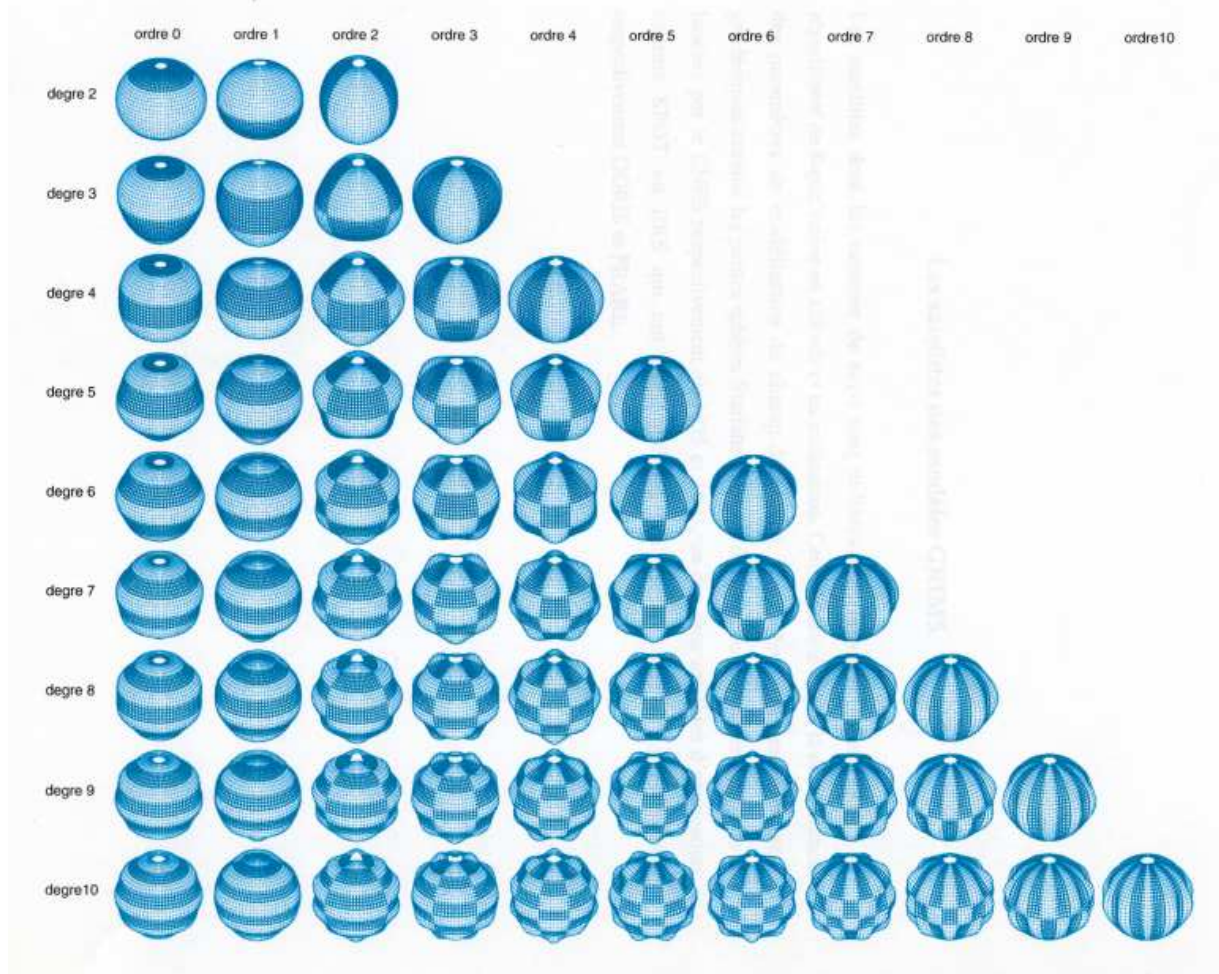


FIG. 2.2 – Fonctions harmoniques sphériques (source GRGS).

On peut faire différentes remarques quant aux particularités de ces coefficients de Stokes :

- Si l'origine du repère considéré est prise au centre de masse de la Terre, on a : $C_{00} = 1$ et $C_{10} = C_{11} = S_{11} = 0$ (voir Annexe E).
- Lorsque $m = 0$, les C_{n0} sont appelés coefficients zonaux, aussi notés $-J_n$ et par définition : $S_{n0} = 0$.
- Lorsque $n = m$, les coefficients de Stokes sont dits sectoriaux.
- Lorsque $n > m$ et $m \geq 1$, C_{nm} et S_{nm} sont appelés coefficients tesséraux.

TAB. 2.1 – Fonctions de Legendre $P_{nm}(\sin \phi)$ de degré n et d'ordre m .

Degré	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$n = 0$	1			
$n = 1$	$\sin \phi$	$\cos \phi$		
$n = 2$	$\frac{3 \sin^2 \phi - 1}{2}$	$3 \sin \phi \cos \phi$	$3 \cos^2 \phi$	
$n = 3$	$\frac{5 \sin^3 \phi - 3 \sin \phi}{2}$	$\cos \phi \frac{15 \sin^2 \phi - 3}{2}$	$15 \cos^2 \phi \sin \phi$	$15 \cos^3 \phi$

TAB. 2.2 – Coefficients de normalisation pour les coefficients de Stokes de degré 2 du potentiel gravitationnel terrestre : $C_{nm} = \beta_{nm} \bar{C}_{nm}$ et $S_{nm} = \beta_{nm} \bar{S}_{nm}$.

Ordre m	β_{2m}
0	$\sqrt{5}$
1	$\sqrt{\frac{5}{3}}$
2	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{3}}$

Base théorique de cette modélisation du potentiel

Montrons maintenant comment on modélise le potentiel gravitationnel terrestre en séries d'harmoniques sphériques (voir par exemple Levallois & Kovalevsky 1971, Tome 4). Tout d'abord, on peut dire que l'élément dU de potentiel d'interaction, créé par l'élément de masse terrestre dm et agissant sur le satellite S de masse m (voir Fig. 2.3), s'exprime par :

$$dU = G \frac{m \, dm}{\delta}$$

et si \mathcal{V} est le volume occupé par la Terre, le potentiel gravitationnel duquel dérive la force qu'exerce la Terre sur le satellite est :

$$U(\vec{r}) = G \iiint_{\vec{\rho} \in \mathcal{V}} \frac{m \, dm}{|\vec{r} - \vec{\rho}|} = G \iiint_{\vec{\rho} \in \mathcal{V}} \frac{m \, dm}{\delta} \quad (2.7)$$

Rappelons comment on peut exprimer un rapport $\frac{1}{\delta}$ grâce aux polynômes de Legendre. Dans le triangle $OS(dm)$, on a :

$$\begin{aligned} \delta^2 &= r^2 + \rho^2 - 2 r \rho \cos \theta \\ \frac{1}{\delta} &= \frac{1}{r} \left(1 - 2 \frac{\rho}{r} \cos \theta + \frac{\rho^2}{r^2} \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

De plus, nous avons un théorème (voir par exemple Lambeck 1988) nous disant que la fonction f qui à $\frac{\rho}{r}$ associe $\left(1 - 2 \frac{\rho}{r} \cos \theta + \frac{\rho^2}{r^2} \right)^{-1/2}$ est développable en série entière de $\frac{\rho}{r}$

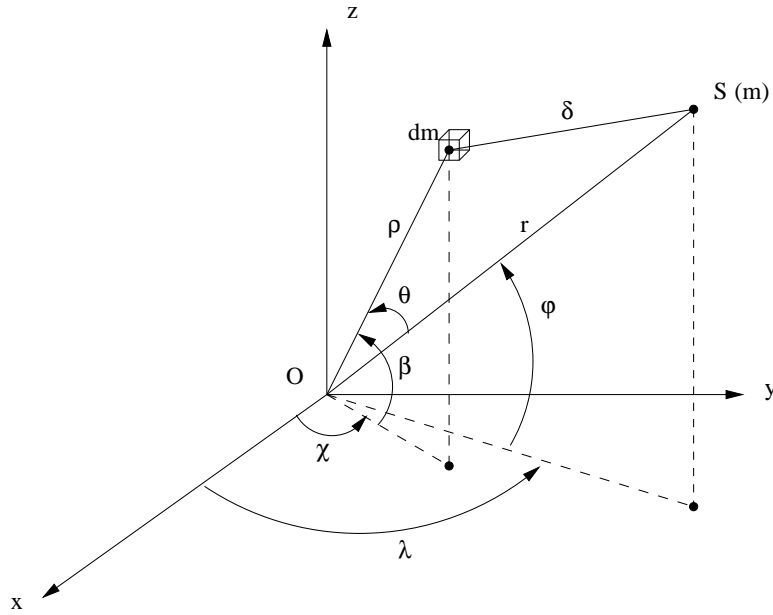


FIG. 2.3 – Configuration d'un satellite S de masse m orbitant autour de la Terre, subissant donc une force perturbatrice due à toutes les masses dm terrestres issues d'un élément de volume.

(et est convergente pour $\rho < r$) par :

$$f\left(\frac{\rho}{r}\right) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n P_n(\cos \theta) \quad (2.9)$$

où les P_n sont les polynômes de Legendre tels que :

$$P_n(x) = \sum_{2k=0}^n (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n (n-k)! (n-2k)! k!} x^{n-2k} \quad (2.10)$$

On peut montrer que ces derniers sont solution de l'équation de Legendre suivante (équation différentielle du deuxième ordre) :

$$(1-x^2) \frac{d^2 P_n}{dx^2} - 2x \frac{dP_n}{dx} + n(n-1)P_n = 0 \quad (2.11)$$

qui nous permet alors d'établir par récurrence, que :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n] \quad (2.12)$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{r} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n P_n(\cos \theta) \quad (2.13)$$

Si on revient maintenant à l'équation (2.7), à partir de l'équation (2.13), on peut

écrire :

$$\begin{aligned}
U(\vec{r}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(\vec{r}) \\
&= \frac{G}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{m}{r^n} \iiint_{\mathcal{V}} \rho^n P_n(\cos \theta) dm
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Ainsi, en considérant la masse m du satellite comme l'unité, (x, y, z) ses coordonnées cartésiennes et (X, Y, Z) les coordonnées du point d'intégration (à la distance ρ), on peut écrire finalement :

$$\begin{aligned}
U(\vec{r}) &= \frac{G}{r} \iiint_{\mathcal{V}} \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) \right] dm \\
&= U_0 + \sum_{n \geq 1} U_n
\end{aligned} \tag{2.15}$$

où le calcul des premiers termes est détaillé en Annexe E.

Introduisons maintenant les harmoniques sphériques : On appelle tout d'abord polynôme harmonique d'ordre n à 3 variables un polynôme Π_n de degré n fonction de (x, y, z) , homogène et vérifiant l'équation de Laplace suivante :

$$\frac{\partial^2 \Pi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi_n}{\partial z^2} = 0. \tag{2.16}$$

Et l'on sait qu'il est possible d'exprimer tout polynôme harmonique Π_n en fonction des coordonnées (r, λ, ϕ) grâce aux fonctions harmoniques sphériques S_n d'ordre n :

$$\Pi_n(r, \lambda, \phi) = r^n S_n(\lambda, \phi). \tag{2.17}$$

Comme le potentiel gravitationnel U satisfait l'Equation de Laplace en dehors de la sphère terrestre : $\Delta U = 0$, on peut alors le développer en harmoniques sphériques, par l'intermédiaire des éléments U_n de l'équation (2.15) :

$$U(r, \lambda, \phi) = \frac{\mu}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_e}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \phi) [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] \right] \tag{2.18}$$

où r est la distance depuis le satellite jusqu'au centre de la Terre, λ est la longitude du satellite, ϕ est sa latitude, $\mu = G M$, n est le degré du développement, m son ordre et R_e le rayon équatorial terrestre, car rayon de la sphère de référence (i.e. englobant entièrement le corps).

2.3 Détermination pratique des coefficients du potentiel de gravité

Le champ de gravité est déterminé à l'aide des coefficients de Stokes, jusqu'à un certain degré et un certain ordre. De nos jours, typiquement, la géodésie spatiale permet d'obtenir un modèle de champ jusqu'au degré 120.

L'étude du positionnement des satellites artificiels permet la détermination des coefficients du champ de gravité terrestre. En effet, ceux-ci sont des paramètres du modèle de l'orbite du satellite. Par ajustement des paramètres du modèle aux observations de l'orbite, on remonte ainsi aux coefficients du champ de gravité (voir Levallois & Kovalevsky 1971, Tome 4). Ceci nécessite (1) le calcul de l'orbite du satellite en fonction des conditions initiales, du modèle de forces utilisé et des équations du mouvement (i.e. intégration d'orbite), ainsi que (2) l'orbite mesurée, provenant des mesures de positionnement des satellites (télémétrie laser, techniques DORIS ou GPS; voir Table 1.4 pour le détail des observables dans chacune des techniques). Ainsi, des modèles de forces de plus en plus précis sont requis pour répondre aux besoins de la détermination des orbites, et réciproquement, des systèmes de mesure de plus en plus précis sont développés et permettent d'améliorer les modèles de forces.

Nous allons tout d'abord détailler les équations du mouvement du satellite (en se basant sur le problème des deux corps perturbé) utilisées dans les logiciels d'orbitographie, afin de déterminer les coefficients du champ de gravité par ajustement avec des données de mesure de positionnement des satellites. La résolution numérique de ces équations sera détaillée dans le Chapitre 6. Ensuite, nous détaillerons la méthode d'ajustement par moindres carrés permettant de minimiser l'écart quadratique entre les mesures et les modèles de positionnement du satellite.

2.3.1 Equations du mouvement d'un satellite artificiel : Problème des deux corps perturbé

La Terre ne pouvant pas être assimilée à un objet ponctuel comme dans le problème des deux corps classique, elle est considérée comme sphéroïdale. Les forces perturbatrices agissant sur le satellite sont :

- D'origine gravitationnelle : Potentiel terrestre, attraction de la Lune, du Soleil et dans une moindre mesure des autres planètes;
- D'origine non gravitationnelle : Freinage atmosphérique, pression de radiation solaire, albédo terrestre.

Ceci implique que le champ de gravitation n'est alors plus képlérien. Les éléments orbitaux $(a, e, i, \omega, \Omega, M)$ du satellite sont ainsi fonction du temps : on les définit alors comme les éléments osculateurs de l'ellipse pour une date t donnée (voir Fig. 2.4 ainsi que l'Annexe F). Et la méthode des perturbations consiste à calculer les écarts à un mouvement de référence képlérien.

Dans le système de référence céleste géocentrique, les équations du mouvement d'un corps ponctuel S (de masse négligeable par rapport à celle de la Terre) soumis à une force centrale newtonienne sont :

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2.19)$$

où \vec{r} est le vecteur position du satellite et $\mu = G M$ où M est la masse du corps central. Les équations du mouvement perturbé sont alors :

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \sum_i \vec{F}_i \quad (2.20)$$

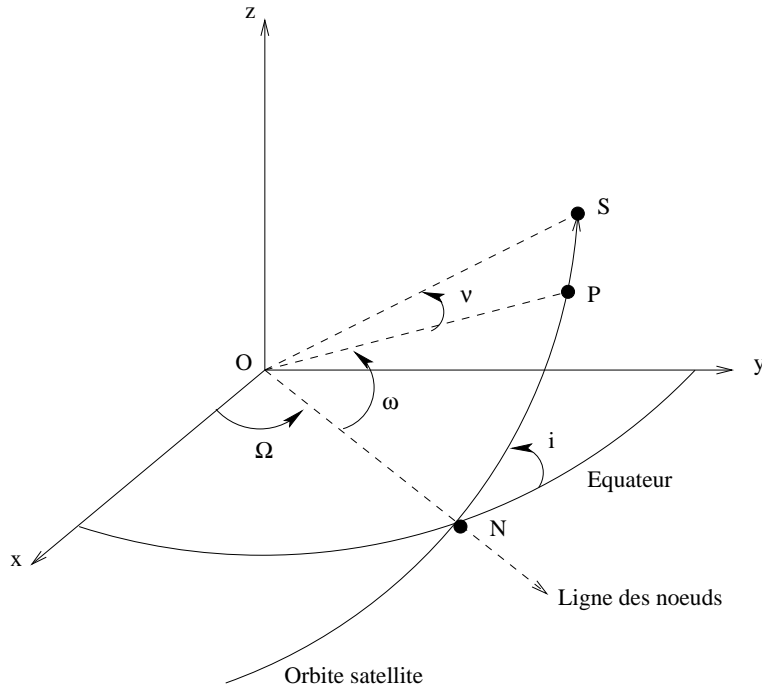


FIG. 2.4 – Éléments orbitaux d'un satellite S orbitant autour de la Terre (P est le périégée de l'orbite et N est le noeud ascendant de l'orbite).

où les \vec{F}_i sont les différentes forces perturbatrices agissant sur le satellite. Un certain traitement analytique permet d'aboutir aux équations planétaires de Lagrange, nous donnant les variations des éléments orbitaux, en fonction du potentiel perturbateur V (Levallois & Kovalevsky 1971, Tome 4) :

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2}{n a} \frac{\partial V}{\partial M} \\
 \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{n a^2 e} \frac{\partial V}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 e} \frac{\partial V}{\partial \omega} \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{\cot i}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial V}{\partial \omega} - \frac{1}{n a^2 \sin i \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial V}{\partial \Omega} \\
 \frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{n a} \frac{\partial V}{\partial a} - \frac{1-e^2}{n a^2 e} \frac{\partial V}{\partial e} \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 e} \frac{\partial V}{\partial e} - \frac{\cot i}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial V}{\partial i} \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{n a^2 \sin i \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial V}{\partial i}
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

où n est le moyen mouvement du satellite et l'on pourra se référer à l'Annexe F pour la description des éléments orbitaux du satellite. Notons qu'en pratique, de nos jours, ces équations de Lagrange ne sont en général pas utilisées afin de calculer les orbites des satellites.

On peut noter que les équations de Lagrange (2.21) sont une forme particulière des équations de Gauss, lorsque l'on suppose que les forces perturbatrices (forces at-

mosphériques de surface, albédo, pression de radiation solaire, potentiel gravitationnel terrestre, ...) dérivent d'un potentiel V (i.e. $\vec{F} = \frac{1}{m} \vec{\nabla} V$).

De plus, pour de petites excentricités e ou de petites inclinaisons i , qui interviennent dans les dénominateurs des seconds membres des équations précédentes, il peut y avoir un problème numérique. Dans ce cas, on est amené à introduire de nouvelles variables dans le problème.

2.3.2 Méthode des moindres carrés pour la restitution d'orbite

On cherche à minimiser la "distance" entre l'orbite du satellite calculée et celle mesurée, afin d'ajuster le modèle de trajectoire choisi aux données de mesure. Cette minimisation utilise la méthode des moindres carrés que nous allons expliciter. Nous nous sommes pour cela basé sur Pelat (2000) et inspiré de Zarrouati (1997).

On dispose de données de mesure \mathbf{z}_{obs} entachées d'erreurs. Les observations \mathbf{z}_{obs} associées à l'orbite (par exemple, temps aller d'un signal électromagnétique du satellite à un récepteur terrestre) vont nous permettre d'atteindre les véritables valeurs cherchées \mathbf{Z}_{vrai} à travers la relation additive suivante :

$$\mathbf{z}_{obs} = \mathbf{Z}_{vrai}(\tilde{\mathbf{x}}_0, \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_0, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, t) + \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.22)$$

où $\boldsymbol{\alpha}$ représente un certain nombre de paramètres de modèle dont dépend l'expression des forces perturbatrices, et $\boldsymbol{\beta}$ représente un certain nombre de constantes physiques dont dépend la modélisation des mesures. On appelle $\boldsymbol{\epsilon}$ le bruit de mesure, que l'on suppose parfois de moyenne nulle (i.e. il y a une distribution gaussienne des erreurs, mais il n'y a pas d'erreur systématique). De plus, $\tilde{\mathbf{x}}_0$ et $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_0$ sont respectivement la position et la vitesse initiale du satellite.

L'estimateur de \mathbf{Z}_{vrai} , noté $\hat{\mathbf{Z}}$, minimise l'écart quadratique des observations à un modèle choisi. L'estimation correspondante du "bruit" (ou résidu), notée $\hat{\epsilon}$, est : $\hat{\epsilon} = \mathbf{z}_{obs} - \hat{\mathbf{Z}}$.

L'ajustement d'orbite consiste à déterminer par correction différentielle certains des paramètres $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \tilde{\mathbf{x}}_0, \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_0)$. On doit faire un choix dans les paramètres à ajuster et on différentie :

- $\boldsymbol{\chi}$ de dimension p ($p \ll$ nombre d'observations) : vecteur des paramètres à ajuster,
- $\boldsymbol{\gamma}$: vecteur des paramètres que l'on renonce à ajuster.

On notera alors que le vecteur $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})^t$ comporte les mêmes termes que le vecteur $(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\gamma})^t$.

Afin d'ajuster de manière quadratique les paramètres du modèle, on linéarise celui-ci au voisinage de valeurs nominales a priori raisonnablement proches des véritables valeurs cherchées, selon la formule de Taylor :

$$\mathbf{z}_{obs} = \mathbf{z}_N + \overline{\mathbf{B}} \delta \boldsymbol{\chi} - \overline{\mathbf{K}} \delta \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.23)$$

où \mathbf{z}_N est l'observable tirée des paramètres du modèle a priori, et :

- $\overline{\mathbf{B}}$ est la matrice $(M \times p)$ des dérivées partielles des M mesures par rapport aux p paramètres à ajuster ;

$$B_{ij} = \frac{\partial z_{Ni}}{\partial \chi_j} \quad , \quad i = 1, \dots, M \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, p \quad (2.24)$$

Si on cherche à déterminer les variations temporelles du champ de gravité, la matrice $\underline{\overline{B}}$ (dite matrice normale) comprendra les dérivées des mesures par rapport aux coefficients du champ dont on cherche à déterminer les valeurs à différents instants t (on obtiendra ainsi une série temporelle des coefficients de Stokes de degré et ordre choisis).

- $\underline{\overline{K}}$ est la matrice ($M \times p'$) des dérivées partielles des M mesures par rapport aux p' paramètres non ajustés,
- $\delta\chi$ et $\delta\gamma$ sont les corrections des paramètres χ et γ .

On cherche alors à minimiser l'expression suivante :

$$\begin{aligned} S &= (\mathbf{z}_{obs} - (\mathbf{z}_N + \underline{\overline{B}} \delta\chi))^t \underline{\overline{V}}^{-1} (\mathbf{z}_{obs} - (\mathbf{z}_N + \underline{\overline{B}} \delta\chi)) \\ &= \mathbf{U}^t \underline{\overline{W}} \mathbf{U} \end{aligned} \quad (2.25)$$

où l'on a :

- \mathbf{U} est le vecteur résidu égal à $(-\epsilon - \underline{\overline{K}} \delta\gamma)$,
- $\underline{\overline{V}}$ est la matrice de variance-covariance des observations, et
- $\underline{\overline{W}} = \underline{\overline{V}}^{-1}$ est la matrice de pondération permettant d'accorder plus ou moins d'importance à telle ou telle mesure.

Afin de résoudre ce problème des moindres carrés et donc de minimiser l'expression précédente, on est amené à résoudre les équations normales suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial(\delta\chi)} &= 0 \\ (\underline{\overline{B}}^t \underline{\overline{W}} \underline{\overline{B}}) \delta\chi &= \underline{\overline{B}}^t \underline{\overline{W}} (\mathbf{z}_{obs} - \mathbf{z}_N) \end{aligned} \quad (2.26)$$

dont la solution nous donne **l'estimateur au sens des moindres carrés** des écarts $\delta\chi$, que l'on cherche à déterminer :

$$\widehat{\delta\chi} = (\underline{\overline{B}}^t \underline{\overline{W}} \underline{\overline{B}})^{-1} \underline{\overline{B}}^t \underline{\overline{W}} (\mathbf{z}_{obs} - \mathbf{z}_N) \quad (2.27)$$

Entre autre $\widehat{\delta\chi}$ pourra être la correction à apporter au modèle de champ de gravité choisi (i.e. aux coefficients de Stokes implémentés) afin d'obtenir le résultat de l'ajustement et donc le nouveau modèle, en accord avec les mesures utilisées.

On peut noter la nécessité d'une part d'un *modèle de mouvement* introduisant la dynamique et les forces de perturbation (voir équations (2.21)), puis d'autre part d'un *modèle de mesures* (matrice $\underline{\overline{B}}$ Eq. (2.24)) (i.e. modélisation des mesures des techniques de géodésie spatiale dans le logiciel de restitution d'orbite), comme nous l'avons déjà abordé. Ensuite on résout les équations (2.27) de manière numérique, où la matrice $\underline{\overline{B}}$ dépend en fait des modèles implémentés. Si on s'intéresse aussi aux résidus de l'ajustement effectué, la méthode des moindres carrés nous donne l'estimateur suivant : $\widehat{\underline{\mathbf{V}}} = \underline{\overline{B}} \widehat{\delta\chi} - (\mathbf{z}_{obs} - \mathbf{z}_N)$. Le but est qu'il soit le plus petit possible.

Nous avons vu finalement que (i) les observations du positionnement des satellites artificiels, ainsi que (ii) les modèles de forces implémentés dans les logiciels d'orbitographie, nous permettent d'ajuster les paramètres souhaités de nos modèles, et notamment les paramètres du modèle du champ de gravité terrestre que sont les coefficients de Stokes C_{lm} et S_{lm} .

2.4 Variations temporelles du champ de gravité terrestre

Les variations temporelles du champ de gravité terrestre sont dues à des redistributions de masses dans la Terre solide, l'atmosphère et l'hydrosphère (océan, réservoirs continentaux, glaciers ...), ainsi qu'à des échanges entre ces différentes couches (voir Table 2.3 et Chao 1994, pour les différentes causes possibles). L'étude de ces variations temporelles peut alors nous apporter des informations géophysiques précieuses, notamment sur l'intérieur de la Terre solide. Nous allons nous intéresser aux différentes études menées dans ce domaine (§2.4.1), ainsi qu'aux différents phénomènes temporels observés dans ces variations (§2.4.2). Nous aborderons enfin les contributions possibles du champ de gravité variable à la rotation terrestre (§2.4.3).

TAB. 2.3 – Causes possibles pour les variations temporelles du champ de gravité.

<i>Contributions possibles</i>	
Marées lunisolaires (terrestres et océaniques)	IERS Conventions 2003 (Figs. 7.7 et 7.9)
Redistributions de masses atmosphériques	Chao & Au 1991, Chao & Eanes 1995 (Fig. 7.6)
Variation de stockage des eaux souterraines	
Variation d'épaisseur du manteau neigeux de glace	
Redistributions de masses océaniques (Niveau des mers)	
Tremblements de Terre	Chao & Gross 1987
Rebond post-glaciaire dans le manteau terrestre	Yoder et al. 1983, Rubincam 1984
Effet séculaire	
Convection du manteau / Mouvements tectoniques	
Effet séculaire	
Activité du noyau	
Effet séculaire	

2.4.1 Détermination grâce à la télémétrie laser sur satellite

L'étude des variations temporelles du champ de gravité terrestre a commencé dans les années 1980, avec l'apport des données de la télémétrie laser sur satellite (SLR, *Satellite Laser Ranging*) (Nerem et al. 1993, Tapley et al. 1993, Schutz et al. 1993 et Gegout & Cazenave 1993a) :

- Les satellites géodésiques Lageos I, Lageos II et Starlette lancés respectivement en 1976, 1992 et 1975 sont situés en haute altitude (environ 5000 km au-dessus de la croûte

terrestre) et ne souffrent donc pas des perturbations dues aux frottements atmosphériques.

- Ces satellites ont de plus une grande densité ainsi qu'une forme caractéristique (forme de boule), permettant la diminution des perturbations orbitales extérieures (pression de radiation solaire, ...).

C'est pourquoi ils ont une orbite très stable. De plus, ils montrent une précession du noeud ascendant de leur orbite, liée aux premiers zonaux de degrés pair du champ de gravité terrestre :

$$\frac{d}{dt} \delta\Omega = \alpha \Delta J_2 + \beta \Delta J_4 + \gamma \Delta J_6 + \dots \quad (2.28)$$

où les coefficients devant les zonaux dépendent des éléments orbitaux des satellites. Ainsi, par les mesures précises de positionnement des satellites laser, on a une assez bonne sensibilité afin de déterminer les variations temporelles de ces coefficients.

Cependant, par ces mesures de télémétrie laser sur satellite, on n'a accès qu'à une combinaison linéaire des variations temporelles de certains coefficients du champ de gravité terrestre (combinaison appelée *lumped* ; voir Eq. (2.28)). Pour décorréler ces différents coefficients zonaux, on a donc besoin de plusieurs satellites. En effet, ceci est dû au fait que les termes devant les coefficients zonaux du potentiel de gravité dans l'équation (2.28) dépendent des éléments orbitaux du satellite. Utiliser plusieurs satellites avec des éléments orbitaux différents permettra donc d'obtenir plusieurs équations relatives aux coefficients de Stokes zonaux, afin de les résoudre.

Précisons que le coefficient le plus étudié jusqu'à présent a été $J_2 = -C_{20}$ (valeur 1000 fois plus grande que les valeurs des autres coefficients). C'est aussi la contribution principale aux variations temporelles du champ de gravité terrestre, et lors de toutes les études menées grâce aux données des satellites positionnés par télémétrie laser, différentes composantes ont été détectées dans ses variations temporelles. Il est intéressant de les comparer avec des données atmosphériques, océaniques ou hydrologiques pour faire apparaître les possibles contributions géophysiques aux variations du champ de gravité, et entrevoir une analyse physique de ces résultats. Nous allons nous intéresser dans la suite à ces différentes composantes séculaire et périodiques.

2.4.2 Variations du coefficient C_{20}

Les variations temporelles de $C_{20} = -J_2$ traduisent les variations de l'ellipticité terrestre (ou aplatissement terrestre). Ce sont des redistributions de masses de l'équateur vers les pôles, ou inversement. D'après les différentes études faites depuis une vingtaine d'années, deux catégories de variations temporelles ont été détectées dans ce coefficient :

- Variation séculaire,
- Variations saisonnières,

dont nous allons parler plus en détails.

Variation séculaire \dot{J}_2

Yoder et al (1983) ont mis en évidence une diminution séculaire (respectivement augmentation séculaire) dans les données de J_2 (respectivement de C_{20}). Ceci traduisait une diminution de l’aplatissement terrestre, qui fut expliquée par l’effet du rebond postglaciaire (Rubincam 1984). Autrement dit, depuis l’ère glaciaire et la fonte d’une partie des calottes polaires, il y a une relaxation progressive du manteau terrestre visco-élastique. Tout au long de la décennie suivante, de nouvelles études ont été poursuivies avec Lageos I ou II et Starlette, afin d’évaluer l’amplitude de cette variation séculaire (voir Table 2.4).

Cependant, vers les années 1998, on a constaté un changement de pente dans les variations de J_2 . Ce changement indiquerait que l’aplatissement terrestre a alors tendance à réaugmenter. Ce phénomène a été étudié depuis par de nombreuses équipes (Cox & Chao 2002), (Cazenave & Nerem 2002), (Dickey et al. 2002). Il semble que certains l’expliquent par une considération rigoureuse des redistributions de masses globales à grande échelle, des grandes latitudes vers les régions équatoriales, dans le système {Terre solide - Atmosphère - Hydrosphère}. Ils considèrent alors notamment les effets électromagnétiques à la frontière noyau-manteau, les phénomènes d’El Nino ou bien encore les échanges hydrologiques dans le Pacifique et les redistributions de masses glaciaires (Dickey et al. 2002).

TAB. 2.4 – Valeur de la pente séculaire observée dans les variations de J_2 .

Auteurs	Secular variation of J_2 (/an)	Durée de l’étude	Sat. utilisés
Yoder et al. 1983	-3×10^{-11}	5 ans et demi	Lageos I
Nerem et al. 1993	-2.6×10^{-11}	1980-1989	Lageos-1
Schutz et al. 1993	$-2.5 (\pm 0.3) \times 10^{-11}$	1975-1990	Starlette
Cazenave et al. 1995	$-3.0 (\pm 0.5) \times 10^{-11}$	1984-1994	Lageos-1 & 2
Eanes & Bettapdur 1995	$-2.56 (\pm 0.34) \times 10^{-11}$		Lageos-1, Starlette
Nerem & Klosko 1995	$-2.77 (\pm 0.25) \times 10^{-11}$	1986-1994	Lageos-1 & 2, Ajisai, Starlette
Bianco et al. 1998	$-2.5 (\pm 0.7) \times 10^{-11}$	1985-1997	Lageos-1 & 2
Bourda & Capitaine 2004	$-2.5 (\pm 0.2) \times 10^{-11}$	1985-1998	GRIM5
Lemoine et al. 2004	$-9.4 \times 10^{-12} *$	1985-2004	Lageos-1 & 2
Morisson & Stephenson, 1997	$-3.4 (\pm 0.6) \times 10^{-11}$	Sur 2000 ans	Données d’éclipses

(*) Tendence estimée dans cette étude-là sur la période 1985-2004, et non plus 1985-1998.

Variations saisonnières

Lorsqu’on retire la variation séculaire de J_2 , les variations saisonnières (annuelles ou semi-annuelles) peuvent être étudiées (Chao & Au 1991). Les variations annuelles sont prédominantes et bien expliquées par la contribution atmosphérique au ΔC_{20} (Chao & Eanes 1995).

Afin de calculer théoriquement la contribution atmosphérique aux variations de J_2 , on utilise une formule (voir par exemple Chao 1994) prenant en compte les redistributions

de masses atmosphériques et l’effet de surcharge qu’elles créent sur la croûte terrestre :

$$\Delta J_2(t) = -\frac{1+k'_2}{\mathcal{M}g} \mathcal{R}_e^2 \int \Delta p(\theta, \lambda, t) P_2(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \, d\lambda \quad (2.29)$$

où \mathcal{M} est la masse terrestre, \mathcal{R}_e est le rayon équatorial terrestre moyen, g est la gravité terrestre moyenne en surface, k'_2 est un nombre de Love de degré 2 caractérisant l’élasticité terrestre (Farrel 1972) et $\Delta p(\theta, \lambda, t)$ est l’écart à une pression moyenne, en chaque point terrestre (θ, λ) d’une grille (ECMWF), toutes les 6 heures. Pour utiliser cette formule, on suppose que l’océan réagit à l’effet de surcharge de l’atmosphère tel un baromètre inverse (hypothèse IB, i.e. de baromètre inverse). Ceci s’avère réaliste, puisque l’on s’intéresse aux grandes longueurs d’onde spatiales comme J_2 , et à de grandes échelles de temps sur lesquelles les masses d’eau peuvent se rééquilibrer de manière hydrostatique face aux variations de pression atmosphérique.

La contribution atmosphérique étant soustraite, il reste les contributions océaniques, hydrologiques ainsi que d’autres effets non encore modélisés. Lors de toutes les études citées précédemment, les variations temporelles d’autres coefficients zonaux ont été étudiées, telles celles de J_3 ou J_4 . Dans la Table 2.5, nous nous sommes focalisés sur $J_2 = -C_{20}$, car c’est un coefficient harmonique sphérique intervenant dans la théorie de la rotation terrestre (via les moments d’inertie terrestres pour la vitesse de rotation, voir §3.3.1 ; et via l’ellipticité dynamique pour la précession-nutation, voir §3.3.3).

TAB. 2.5 – Amplitude des variations saisonnières observées dans J_2 .

Auteurs	Variations saisonnières dans J_2	Durée de l’étude
Gegout & Cazenave 1993a	1.43×10^{-10} (annuel) 0.76×10^{-10} (1/2 annuel)	1985-1989
Cheng & Tapley 1999	$1.25 (\pm 0.1) \times 10^{-10}$ (annuel) $140 (\pm 10)^\circ$ (phase)	1993-1995

2.4.3 Contributions à la Rotation de la Terre : Connaissances actuelles, Limitations et Progrès

Les variations du champ de gravité terrestre correspondent à des redistributions de masses observées de manière globale, autrement dit se produisant dans la Terre globale. Par contre, les observations des variations des paramètres d’orientation terrestres (EOP) concernent le manteau de la Terre seul (elles sont en fait relatives à la croûte terrestre, mais cette dernière est considérée comme solidaire du manteau). Ces variations des EOP sont dues à des redistributions de masses, mais aussi à des mouvements des couches fluides (atmosphère, océans) agissant sur le manteau terrestre, à des effets du couple extérieur agissant sur le manteau, et à des couplages entre les différentes composantes.

Par conséquent, pour compléter la modélisation de la rotation de la Terre avec des données de variations du champ de gravité terrestre, il faudra tenir compte de ces différences

(notamment dans les Chapitres 9 et 10). Comparer les données des variations des EOP avec celles des variations du champ de gravité nécessitera donc de retirer aux premières les termes dûs aux mouvements et aux couplages du noyau et des corps extérieurs.

La détermination des variations séculaires et à très longue période du coefficient $J_2 = -C_{20}$ est très utile pour l'interprétation des variations à très long terme de la vitesse de rotation terrestre (Morrison & Stephenson 1997). Le changement de pente observé dans les séries de J_2 (et son interprétation géophysique) est très intéressant en cela.

Les séries temporelles de coefficients du champ de gravité disponibles ont généralement un pas en temps de 10 jours minimum (en général c'est même 1 mois). Par conséquent, les phénomènes diurnes et sub-diurnes non encore bien modélisés dans le mouvement du pôle (voir §1.5.3) ne pourront pas être étudiés avec ce genre de données.

La tendance séculaire de J_2 (terme linéaire dans les variations de J_2) est reliée au terme en t^2 de l'angle de précession en longitude ψ_A . D'après le §1.5.3, ce dernier est justement mal déterminé par les observations VLBI. Par conséquent, nous pourrions utiliser les déterminations de \dot{J}_2 par la géodésie spatiale pour essayer de compléter la modélisation de la rotation terrestre.

2.5 Conclusion

Le champ de gravité terrestre est primordial dans l'étude du positionnement des satellites artificiels, en tant que modèle de forces gravitationnelles terrestres. A l'inverse, l'orbitographie des satellites artificiels nous donne accès à la détermination de ce champ gravitationnel terrestre. Il est modélisé sur la sphère terrestre à l'aide du potentiel gravitationnel et des coefficients de Stokes C_{nm} et S_{nm} . Les variations de ces derniers peuvent être déterminées grâce aux satellites positionnés par télémétrie laser (tels Lageos I, Lageos II, Stella, Starlette). Elles nous donnent accès aux redistributions des masses à l'intérieur de la Terre, et par conséquent à certains termes des variations des paramètres d'orientation terrestre (EOP), comme nous le montrerons dans le Chapitre 3. Nous verrons également dans la deuxième partie de la thèse, à l'aide du satellite GRACE, comment nous pouvons déterminer d'une manière différente les variations temporelles du champ de gravité terrestre. Finalement, nous avons confronté les caractéristiques des données de variations du champ de gravité à celles des EOP et nous en avons retiré des différences notables à prendre en compte pour les Chapitres 9, 10 et 11.

Chapitre 3

Liens entre Champ de gravité et Rotation terrestre

3.1 Introduction

La rotation terrestre dépend de la distribution des masses à l'intérieur de la Terre (via leur influence sur les éléments du tenseur d'inertie qui intervient dans les équations dynamique de la rotation terrestre). Cette distribution des masses peut aussi être reliée au champ de gravité terrestre et plus particulièrement à ses variations. Nous pouvons donc théoriquement relier les paramètres d'orientation terrestres (EOP) aux variations du champ de gravité. Les équations relatives à la longueur du jour et au mouvement du pôle ont déjà été établies dans d'autres études (voir par exemple Lambeck 1988 ou Gross 2000), mais cette étude est l'une des premières à utiliser les données de variations temporelles du champ de gravité afin d'en étudier l'influence sur la modélisation et la connaissance des EOP. Nous pouvons ajouter que l'étude relative à la précession-nutation (Bourda & Capitaine 2004) est originale en ce sens qu'elle utilise les données de géodésie spatiale de variations de C_{20} afin d'étudier leur influence sur les angles de précession (par l'intermédiaire de l'ellipticité dynamique H). De manière générale, ces données de géodésie spatiale (i.e. variations temporelles des coefficients du champ de gravité) seront utilisées en complément d'autres sources car la géodésie spatiale n'observe pas la rotation de la Terre dans son ensemble : pour chacun des EOP, seulement une partie de l'information est fournie par les coefficients du champ de gravité (i.e. la partie *matière*).

De nos jours, grâce aux techniques laser sur satellite et aux nouvelles missions gravimétriques (i.e. CHAMP, GRACE), nous avons accès aux variations temporelles des coefficients du potentiel gravitationnel terrestre. En parallèle, les mesures des EOP (par exemple, VLBI) deviennent de plus en plus précises et la modélisation des EOP nécessite alors de considérer les phénomènes géophysiques engendrant des variations de l'orientation de la Terre en dessous de la centaine de microsecondes de degrés (et de l'ordre de la dizaine de μ s pour la vitesse de rotation).

Nous étudierons comment ce lien entre rotation terrestre et champ de gravité peut être utilisé afin d'améliorer la connaissance des phénomènes de variation de l'orientation terrestre. Tout d'abord, nous allons détailler (§3.2) les liens entre les coefficients du potentiel gravitationnel et les moments d'inertie terrestres. Ensuite nous verrons comment cela nous permet de relier l'orientation de la Terre à son champ de gravité, en considérant successivement chaque paramètre d'orientation terrestre : (i) la longueur du jour, (ii)

les coordonnées du pôle et (iii) les angles de précession-nutation. Nous en étudierons les conséquences pratiques dans la troisième partie de la thèse.

3.2 Liens entre coefficients de Stokes et moments d'inertie terrestres

Nous allons tout d'abord donner le lien entre la distribution des masses à l'intérieur de la Terre et les coefficients du potentiel gravitationnel terrestre d'ordre deux (voir par exemple Lambeck 1988). Les coefficients de Stokes du potentiel terrestre (voir Eq. (2.4)), de par leur définition, peuvent être reliés aux moments d'inertie de la Terre (voir Annexe B) par les relations suivantes (démonstration en Annexe G) :

$$C_{20} = -\frac{I_{33} - \frac{1}{2}(I_{11} + I_{22})}{\mathcal{M} R_e^2} \quad (3.1)$$

$$C_{21} = -\frac{I_{13}}{\mathcal{M} R_e^2} \quad (3.2)$$

$$C_{22} = \frac{I_{22} - I_{11}}{4 \mathcal{M} R_e^2} \quad (3.3)$$

$$S_{21} = -\frac{I_{23}}{\mathcal{M} R_e^2} \quad (3.4)$$

$$S_{22} = -\frac{I_{12}}{2 \mathcal{M} R_e^2} \quad (3.5)$$

où \mathcal{M} et R_e sont la masse et le rayon équatorial de la Terre, respectivement.

D'un autre côté, les relations inverses exprimant les moments d'inertie terrestres en fonction des coefficients de Stokes du potentiel gravitationnel terrestre peuvent être déduites (voir par exemple Gross 2000) :

$$\begin{aligned} I_{11} &= A + \Delta I_{11} = \frac{1}{3} \text{Tr}(I) + \frac{1}{3} \mathcal{M} R_e^2 C_{20} - 2 \mathcal{M} R_e^2 C_{22} \\ &= \frac{1}{3} \text{Tr}(I) + \frac{1}{3} \sqrt{5} \mathcal{M} R_e^2 \bar{C}_{20} - \sqrt{\frac{5}{3}} \mathcal{M} R_e^2 \bar{C}_{22} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} I_{22} &= B + \Delta I_{22} = \frac{1}{3} \text{Tr}(I) + \frac{1}{3} \mathcal{M} R_e^2 C_{20} + 2 \mathcal{M} R_e^2 C_{22} \\ &= \frac{1}{3} \text{Tr}(I) + \frac{1}{3} \sqrt{5} \mathcal{M} R_e^2 \bar{C}_{20} + \sqrt{\frac{5}{3}} \mathcal{M} R_e^2 \bar{C}_{22} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} I_{33} &= C + \Delta I_{33} = \frac{1}{3} \text{Tr}(I) - \frac{2}{3} \mathcal{M} R_e^2 C_{20} \\ &= \frac{1}{3} \text{Tr}(I) - \frac{2}{3} \sqrt{5} \mathcal{M} R_e^2 \bar{C}_{20} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
I_{12} &= \Delta I_{12} = -2 \mathcal{M} \mathcal{R}_e^2 S_{22} \\
&= -\sqrt{\frac{5}{3}} \mathcal{M} \mathcal{R}_e^2 \bar{S}_{22}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
I_{13} &= \Delta I_{13} = -\mathcal{M} \mathcal{R}_e^2 C_{21} \\
&= -\sqrt{\frac{5}{3}} \mathcal{M} \mathcal{R}_e^2 \bar{C}_{21}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
I_{23} &= \Delta I_{23} = -\mathcal{M} \mathcal{R}_e^2 S_{21} \\
&= -\sqrt{\frac{5}{3}} \mathcal{M} \mathcal{R}_e^2 \bar{S}_{21}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

où $Tr(I)$ correspond à la trace de la matrice d'inertie \bar{I} (i.e. la somme des éléments diagonaux de cette matrice).

Pour un corps ayant une symétrie de révolution (i.e. $\Delta I_{11} = \Delta I_{22}$) et dans le cas où la trace du tenseur d'inertie est conservée $\sum_{i=1}^3 \Delta I_{ii} = 0$ (Rochester & Smylie 1974), on peut alors écrire (voir par exemple Lambeck 1980) :

$$\begin{aligned}
\Delta C_{20} &= -\frac{\Delta I_{33} - \Delta I_{11}}{\mathcal{M} \mathcal{R}_e^2} \\
&= -\frac{\Delta I_{33} + \frac{1}{2}\Delta I_{33}}{\mathcal{M} \mathcal{R}_e^2} \\
&= -\frac{3}{2} \frac{\Delta I_{33}}{\mathcal{M} \mathcal{R}_e^2}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

3.3 Lien avec chacun des paramètres d'orientation terrestre

Les variations des moments d'inertie sont reliées aux fluctuations des paramètres d'orientation terrestres (EOP), il en résulte des équations liant la rotation terrestre aux coefficients du champ de gravité, comme nous allons le voir à présent pour chacun des EOP.

Notons que pour le $\Delta(LOD)$ et le mouvement du pôle, nous nous attacherons à séparer les parties *matière* et *mouvement* des fonctions d'excitation contribuant aux variations de ces EOP, car les coefficients du potentiel de gravité correspondent à la partie *matière* de ces fonctions d'excitation.

3.3.1 Vitesse de rotation terrestre : Durée du jour

Considérons tout d'abord le paramètre d'orientation terrestre qu'est l'écart de la longueur du jour, que nous noterons ici $\Delta(LOD)$, par rapport à la longueur du jour solaire

de référence $LOD_{\text{référence}}$ (tel que $LOD_{\text{référence}} = 86400$ s SI). Il peut être défini par l'intermédiaire du vecteur instantané de rotation : $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^t = \Omega (m_1, m_2, 1 + m_3)^t$, où Ω est la vitesse de rotation terrestre de référence. En effet, on peut écrire (voir par exemple, Munk & MacDonald 1960 ou Lambeck 1980) :

$$\begin{aligned}
\Delta(LOD) &= LOD_{\text{réel}} - LOD_{\text{référence}} \\
&= k \frac{2\pi}{\omega_3} - k \frac{2\pi}{\Omega} \\
&= k \left[\frac{2\pi}{\Omega(1+m_3)} - \frac{2\pi}{\Omega} \right] \\
&\simeq k \left[\frac{2\pi}{\Omega}(1-m_3) - \frac{2\pi}{\Omega} \right] \\
&= -k \frac{2\pi}{\Omega} m_3 \\
&= -LOD_{\text{référence}} \times m_3
\end{aligned} \tag{3.13}$$

où $k = 1.00273781191135448$ (Capitaine et al. 2000) est le facteur de conversion du jour stellaire en jour solaire moyen, tel que : $LOD_{\text{référence}} = k \frac{2\pi}{\Omega} = 86400$ s = 24 h. On a donc finalement :

$$-\frac{\Delta(LOD)}{LOD_{\text{référence}}} = m_3 \tag{3.14}$$

Dans le cas où le manteau est découplé du noyau (redistribution de masse s'effectuant sur plusieurs jours), on peut exprimer m_3 grâce aux équations de Liouville (voir Eq. (1.28) ou Eq. (1.29)). Dans ce cas, on a :

- S'il y a des effets de surcharge dus à c_{33} sur la croûte terrestre :

$$m_3(t) = \psi_3 = \frac{1}{\Omega C_m} \int_0^t L_3(t) dt - (1 + k'_2) \frac{c_{33}}{C_m} - \frac{h_3}{C_m \Omega} \tag{3.15}$$

- S'il n'y a pas d'effets de surcharge dus à c_{33} sur la croûte terrestre :

$$m_3(t) = \psi_3 = \frac{1}{\Omega C_m} \int_0^t L_3(t) dt - \frac{c_{33}}{C_m} - \frac{h_3}{C_m \Omega} \tag{3.16}$$

où C_m est le moment principal d'inertie axial du manteau terrestre, c_{33} est la partie variable du moment principal d'inertie axial terrestre (voir Annexe B), h_3 est le moment cinétique relatif axial et L_3 la troisième composante du couple extérieur luni-solaire. En ne considérant pas le couple extérieur dans l'équation (3.15) (ou bien Eq. (3.16)) (nous n'étudions pas cet effet, que nous devons retirer des données), et en supposant que les autres processus que l'atmosphère et les océans affectant c_{33} ne produisent pas d'effets de surcharge sur la croûte terrestre, on écrit alors :

$$\frac{\Delta(LOD)}{LOD_{\text{référence}}} = (1 + k'_2) \frac{c_{33}^{\text{Atm, Ocean}}}{C_m} + \frac{c_{33}^{\text{Autre Origine}}}{C_m} + \frac{h_3}{C_m \Omega} \tag{3.17}$$

Or d'après l'équation (3.8), l'incrément d'inertie ($\Delta I_{33} = c_{33}$) de I_{33} s'écrit :

$$c_{33}(t) = \frac{1}{3} \Delta Tr(I)(t) - \frac{2}{3} \mathcal{M} \mathcal{R}_e^2 \Delta C_{20}(t) \tag{3.18}$$

où $\Delta Tr(I)(t)$ et $\Delta C_{20}(t)$ sont les écarts temporels à la partie constante correspondante, à chaque instant t . Dans notre problème, nous considérons que le système global (Terre-Atmosphère-Océans) voit sa masse conservée, sous les déformations subies. Ceci implique que $\Delta \mathbf{Tr}(\mathbf{I})(t) = \mathbf{0}$ (Rochester & Smylie 1974), à chaque instant t (i.e. la trace du tenseur d'inertie est invariante au cours du temps). D'après les équations (3.17) et (3.18), on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(LOD)}{LOD_{\text{référence}}} = & -(1 + k'_2) \frac{2}{3 C_m} \mathcal{M} \mathcal{R}_e^2 \sqrt{5} \Delta \bar{C}_{20}^{Atm, Ocean} \\ & - \frac{2}{3 C_m} \mathcal{M} \mathcal{R}_e^2 \sqrt{5} \Delta \bar{C}_{20}^{Autre Origine} + \frac{h_3}{C_m \Omega} \end{aligned} \quad (3.19)$$

où $\Delta \bar{C}_{20}$ correspond aux variations temporelles du coefficient harmonique sphérique de degré 2 et d'ordre 0 du potentiel gravitationnel terrestre, pour un système terrestre global. En d'autres termes, toutes les composantes (couches fluides, Terre solide, ...) doivent être considérées pour les contributions à $\Delta \bar{C}_{20}$ à chaque instant.

Nous présenterons les applications numériques de cette théorie dans la troisième partie de la thèse (chapitre 9).

3.3.2 Orientation de l'axe de rotation dans la Terre : Mouvement du pôle

Le mouvement $p = x_p - i y_p$ du pôle (CIP) dans le repère terrestre est régi par les équations (1.39) (voir §1.2.2). On s'est placé dans le cas où le manteau est découplé du noyau et où les autres fonctions d'excitation que l'atmosphère et les océans sont supposées ne pas engendrer d'effets de surcharge sur la croûte terrestre. D'après les équations (3.10) et Eq. (3.11), on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} p + \frac{i}{\sigma_0} \dot{p} = & \frac{k_0}{k_0 - k_2} \frac{h}{\Omega (C_m - A_m)} \\ & - \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{k_0}{k_0 - k_2} \frac{1 + k'_2}{C_m - A_m} \mathcal{M} \mathcal{R}_e^2 (\bar{C}_{21} + i \bar{S}_{21})^{Atm, Ocean} \\ & - \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{k_0}{k_0 - k_2} \frac{1}{C_m - A_m} \mathcal{M} \mathcal{R}_e^2 (\bar{C}_{21} + i \bar{S}_{21})^{Autre Origine} \end{aligned} \quad (3.20)$$

où \bar{C}_{21} et \bar{S}_{21} sont les coefficients harmoniques sphériques (de degré 2 et d'ordre 1) du potentiel de gravité terrestre.

Ainsi, si on résout ces deux équations différentielles (par exemple dans le domaine de Fourier), on obtient :

$$\begin{aligned} p(t) &= -i \sigma_0 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) H(t - \tau) e^{i\sigma_0(t-\tau)} d\tau \\ &= p(t_0) e^{i\sigma_0(t-t_0)} - i \sigma_0 e^{i\sigma_0 t} \int_{t_0}^t f(\tau) e^{-i\sigma_0 \tau} d\tau \end{aligned} \quad (3.21)$$

où $f(t)$ représente le second membre de Eq. (3.20) et $H(t)$ est la fonction d'Heaviside.

Cependant, nous préférons comparer directement la fonction d'excitation "géodésique" du mouvement du pôle (obtenue grâce aux données des coordonnées du pôle par l'IERS) au second membre de l'Eq. (3.20), issu des données de variations temporelles du champ de gravité. En effet, résoudre directement Eq. (3.21) peut entraîner des erreurs relatives au mouvement de Chandler alors mal considéré.

Nous étudierons les implications pratiques de ces équations dans la dernière partie de la thèse, et plus particulièrement au chapitre 10.

3.3.3 Orientation de l'axe de rotation dans l'espace : Precession-Nutation

La précession et la nutation sont les composantes principales des paramètres d'orientation terrestre caractérisant l'orientation de l'axe de rotation dans l'espace. Le phénomène de précession-nutation est dû aux effets gravitationnels de la Lune, du Soleil et des autres planètes du système solaire sur le bourrelet équatorial terrestre. La précession de l'équateur peut être reliée à l'ellipticité dynamique terrestre H , directement en cause dans les équations. Quant à ce dernier paramètre H , il peut être relié au coefficient gravitationnel J_2 caractérisant l'aplatissement terrestre. Des études antérieures ont déjà montré l'influence des variations séculaires de J_2 sur la précession de l'équateur (Williams 1994; Capitaine et al. 2003) ou bien de ses variations périodiques sur la nutation (Souchay & Folgueira 1999; Lambert & Capitaine 2004). Nous ferons ici intervenir les variations de J_2 dans la détermination de la précession-nutation, par l'intermédiaire du coefficient d'aplatissement dynamique terrestre H (Bourda & Capitaine 2004).

Equations de la précession

Les deux angles principaux de la précession de l'équateur ψ_A et ω_A (voir Fig. 1.7) sont calculés grâce aux équations différentielles suivantes (voir Eq. (29) de Williams 1994, ou bien Eq. (24) de Capitaine et al. 2003) (équations de base de Woolard 1953) :

$$\begin{aligned} \sin \omega_A \frac{d\psi_A}{dt} &= (r_\psi \sin \epsilon_A) \cos \chi_A - r_\epsilon \sin \chi_A \\ \frac{d\omega_A}{dt} &= r_\epsilon \cos \chi_A + (r_\psi \sin \epsilon_A) \sin \chi_A \end{aligned} \quad (3.22)$$

où r_ψ et r_ϵ sont respectivement les vitesses de précession en longitude et en obliquité, ϵ_A est l'obliquité de l'écliptique de la date et χ_A est l'angle de précession planétaire. Des expressions récentes de ces quantités sont données dans Capitaine et al. (2003). L'expression de la contribution totale des vitesses de précession r_ψ (en longitude) et r_ϵ (en obliquité) est détaillée dans Williams (1994) et Capitaine et al. (2003). On peut l'écrire en fonction du temps t et de $\cos \epsilon$, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} r_\psi &= (f_{00} + f_{10} t + f_{20} t^2) + (f_{01} + f_{11} t + f_{21} t^2) \cos \epsilon + \\ &\quad (f_{02} + f_{12} t) \cos^2 \epsilon + (f_{03} + f_{13} t) \cos 2\epsilon / \sin \epsilon + \dots \end{aligned} \quad (3.23)$$

L'angle ϵ étant dépendant du temps ($\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 t + \epsilon_2 t^2 + \epsilon_3 t^3$) et les quantités ϵ_1 , f_{02} , f_{03} (etc ...) étant petites, on peut écrire r_ψ comme $r_\psi = r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + r_3 t^3$, avec :

$$r_0 = f_{00} + f_{01} \cos \epsilon_0 + f_{02} \cos^2 \epsilon_0 + f_{03} \cos 2\epsilon_0 / \sin \epsilon_0 + \dots \quad (3.24)$$

$$r_1 = f_{10} - f_{01} \epsilon_1 \sin \epsilon_0 + f_{11} \cos \epsilon_0 + f_{12} \cos^2 \epsilon_0 + \dots \quad (3.25)$$

où ϵ_0 est l'obliquité de l'écliptique à J2000.0. Le principal terme du premier ordre dans r_0 est une contribution lunisolaire notée $f_{01|LS} \cos \epsilon_0$, telle que (Kinoshita 1977, Dehant & Capitaine 1997) :

$$\begin{aligned} f_{01|LS} &= 3 H \left(\frac{m_m}{m_m + m_\oplus} \frac{M_0}{F_2^3} \frac{n_m^2}{\Omega} + \frac{m_\odot}{m_\odot + m_m + m_\oplus} \frac{S_0}{\Omega} \frac{n_\odot^2}{\Omega} \right) \\ &= k_m M_0 + k_s S_0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

avec H l'aplatissement dynamique terrestre, m_m la masse de la Lune, m_\oplus la masse de la Terre, m_\odot la masse du Soleil, n_m le moyen mouvement de la Lune autour de la Terre, n_\odot le moyen mouvement de la Terre autour du Soleil, Ω la vitesse moyenne de rotation terrestre, F_2 un facteur pour la distance moyenne de la Lune, S_0 et M_0 les amplitudes des termes solaire et lunaire (respectivement) de fréquence nulle (i.e. parties constantes pour la Lune et le Soleil, respectivement, du développement de $\frac{1}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^3 (1 - 3 \sin^2 \beta)$; voir Kinoshita 1977), et :

$$k_m = 3 H \frac{m_m}{m_m + m_\oplus} \frac{1}{F_2^3} \frac{n_m^2}{\Omega} = H K_m \quad (3.27)$$

$$k_s = 3 H \frac{m_\odot}{m_\odot + m_m + m_\oplus} \frac{n_\odot^2}{\Omega} = H K_s \quad (3.28)$$

Les valeurs numériques de ces quantités données par Souchay & Kinoshita (1996) sont :

$$\begin{aligned} M_0 &= 496303.66 \times 10^{-6} \\ S_0 &= 500210.62 \times 10^{-6} \\ k_m &= 7546''.7173289 / \text{cy} \\ k_s &= 3475''.1883295 / \text{cy} \\ f_{01|LS} \cos \epsilon_0 &= 5040''.6445 / \text{cy} \end{aligned} \quad (3.29)$$

et (Kinoshita 1977) :

$$F_2 = 0.999093142$$

Le lien entre la précession de l'équateur (angles ψ_A et ω_A) et l'aplatissement dynamique terrestre (H) se déduit des équations (3.22)-(3.24), Eq. (3.26) et Eq. (3.31) du prochain paragraphe. H est relié à $f_{01|LS}$ par :

$$H = \frac{f_{01|LS}}{K_m M_0 + K_s S_0} \quad (3.30)$$

Détermination de l'aplatissement dynamique terrestre par des valeurs observationnelles de la précession

On peut écrire l'expression (3.24) de r_0 comme :

$$\begin{aligned}
 r_0 = & f_{01|_{LS}} \cos \epsilon_0 + f_{01|_{PL}} \cos \epsilon_0 & (3.31) \\
 + & H \times \text{effets lunisolaires du deuxième ordre} \\
 + & H \times \text{effet dû à l'inclinaison de la Lune, induite par } J_2 \text{ et les planètes} \\
 & (J_2 \text{ and planetary tilt effect}) \\
 + & \text{contribution en } J_4 \text{ du potentiel terrestre} \\
 - & \text{précession géodésique} \\
 + & \text{effets non linéaires (Mathews et al. 2002)}
 \end{aligned}$$

où $f_{01|_{PL}}$ est le terme du premier ordre de la contribution planétaire (également proportionnel à H).

De manière générale, H est calculé grâce à des valeurs observationnelles de r_0 . Les mesures de r_0 sont corrigées en enlevant des modélisations pour les différentes contributions autres que l'effet lunisolaire du premier ordre, détaillées dans l'équation (3.31). Dans ce cas, nous obtenons une valeur de $f_{01|_{LS}}$, qui est le seul terme d'amplitude assez conséquente (de l'ordre de $5000''/\text{cy}$) pour être sensible à de petits changements de la valeur de l'ellipticité dynamique H de la Terre. Par conséquent, grâce à l'équation (3.30), nous pouvons déduire la valeur de H des mesures de r_0 , à l'aide d'un modèle pour le terme lunisolaire du premier ordre $K_m M_0 + K_S S_0$ (voir Fig. 3.1).

Cependant, la valeur de H varie selon les études considérées et l'on constate des différences pouvant atteindre 10^{-7} (voir Table 3.1). Ceci est dû (i) aux différentes valeurs numériques utilisées pour M_0 , S_0 , K_M et K_S par les auteurs dans Eq. (3.30), puis (ii) aux différents modèles implémentés lors de l'utilisation de Eq. (3.31) afin d'en déduire $f_{01|_{LS}}$, et enfin (iii) aux différentes valeurs et observations utilisées pour r_0 dans Eq. (3.31) (voir Fig. 3.1 ; Fig. 1 de Dehant & Capitaine 1997 ; Fig. 5 de Dehant et al. 1999). En effet, d'une part les mesures optiques donnent des valeurs de la vitesse générale de précession en longitude p_A comptée par rapport à l'écliptique de la date, alors que les mesures de VLBI sont repérées par rapport au repère céleste de référence. De manière générale, ψ_A est développé sous forme polynômiale comme : $\psi_A = \psi_0 + \psi_1 t + \psi_2 t^2 + \psi_3 t^3$. Dans la Table 3.1, on rappelle les différentes valeurs utilisées pour (i) ψ_1 (i.e. la vitesse de précession en longitude, telle que : $\psi_1 = r_0$), directement obtenu des mesures VLBI, et (ii) p_1 qui est la valeur de la précession déterminée observationnellement dans le cas optique : $\psi_1 = p_1 + \chi_1 \cos \epsilon_0$ (Lieske et al. 1977).

L'implémentation du modèle de précession-nutation UAI 2000, par Mathews et al. (2002), est lui basé sur une nouvelle méthode, utilisant des considérations géophysiques. Ils ajustent neuf paramètres de référence pour la Terre (BEP, *Basic Earth Parameters*), dont l'ellipticité dynamique terrestre H .

Nous avons ainsi détaillé comment l'ellipticité dynamique H intervenait dans les équations de la précession de l'équateur et comment on la déterminait de manière as-

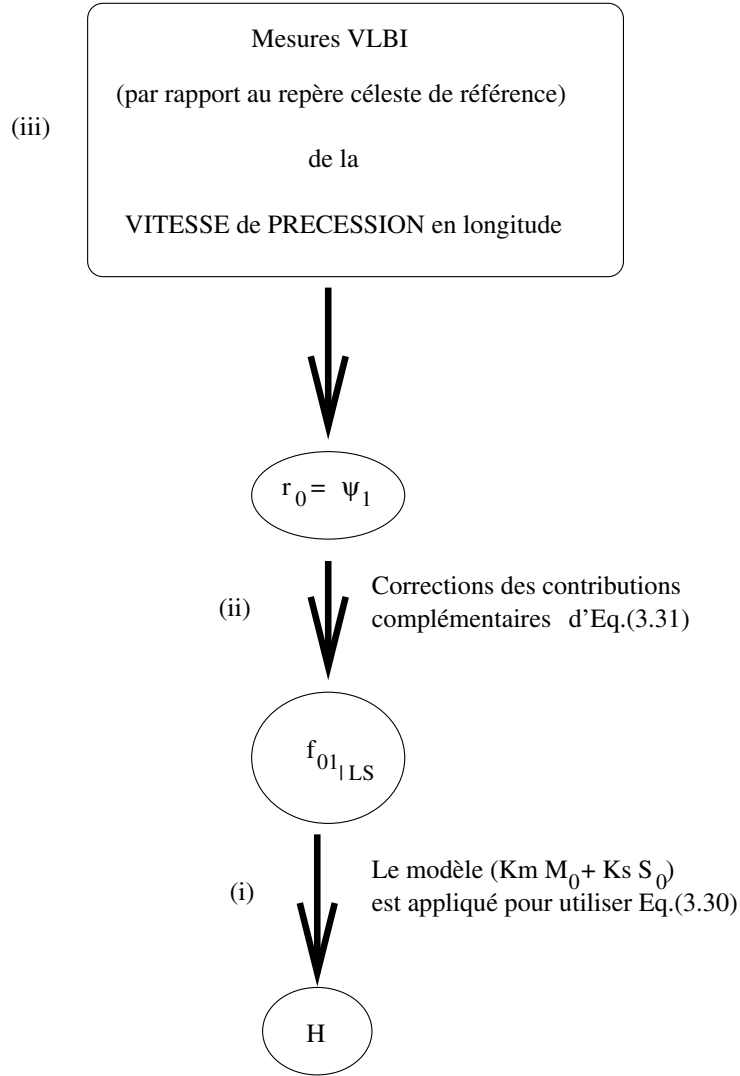


FIG. 3.1 – Méthode de détermination astronomique classique de l'ellipticité dynamique H : les 3 sources de différences pour la valeur de H obtenue sont notées (i), (ii) et (iii).

TAB. 3.1 – Comparaison de différentes constantes utilisées pour la détermination de l'ellipticité dynamique terrestre (H) dans différentes études : (1) la vitesse de précession en longitude (ψ_1), (2) la vitesse générale de précession en longitude (p_1), (3) la précession géodésique (p_g) et (4) l'obliquité de l'écliptique à J2000.0 (ϵ_0). La valeur observationnelle effectivement utilisée est notée en gras.

Sources	H ($\times 10^3$)	(1) ψ_1 (————— en " /cy —————)	(2) p_1	(3) p_g	(4) ϵ_0
Lieske et al. 1977		5038.7784	5029.0966	-1.92	23°26'21".448
Kinoshita 1977 et Seidelmann 1982	3.2739935	5038.7784	5029.0966	-1.92	23°26'21".448
Williams 1994	3.2737634	5038.456501	5028.7700	-1.9194	23°26'21".409
Souchay & Kinoshita 1996	3.2737548	-	5028.7700	-1.9194	23°26'21".448
Bretagnon et al. 1997	3.2737671	5038.456488	5028.7700	-1.919883	23°26'21".412
Bretagnon et al. 2003	-	5038.478750	5028.792262	-1.919883	23°26'21".40880
Fukushima 2003	3.2737804	5038.478143	5028.7955	-1.9196	23°26'21".40955
Capitaine et al. 2003	3.27379448	5038.481507	5028.796195	-1.919883	23°26'21".406
Mathews et al. 2002	3.27379492	5038.478750	5028.7923	-1.9198	23°26'21".410

tronomie. Nous allons maintenant montrer le lien entre H et le coefficient $J_2 = -C_{20}$ du potentiel gravitationnel terrestre, décrivant l'aplatissement terrestre.

Relation entre H et C_{20} :

Dans le cas d'une Terre rigide, sachant que $J_2 = -C_{20} = -\sqrt{5} \bar{C}_{20}$, on peut écrire (Lambeck 1988) :

$$\begin{aligned}
 H = \left(C - \frac{A+B}{2} \right) / C &= \frac{M R_e^2}{C} J_2 \\
 &= -\frac{M R_e^2}{C} C_{20} \\
 &= -\sqrt{5} \frac{M R_e^2}{C} \bar{C}_{20}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

où A , B and C sont les moments principaux d'inertie terrestres, M la masse de la Terre, R_e le rayon équatorial terrestre moyen, et \bar{C}_{20} le coefficient de Stokes normalisé de degré 2 et d'ordre 0 du géopotentiel.

Mais la Terre étant élastique, considérons de petites variations de H , de C_{20} et du troisième moment principal d'inertie de la Terre (C étant sa partie constante et c_{33} sa partie variable). On obtient alors :

$$H_{\text{total}} = \frac{M R_e^2}{C} \frac{1}{1 + \frac{c_{33}}{C}} J_{2 \text{ total}} \tag{3.33}$$

c_{33}/C étant une petite quantité de l'ordre de 10^{-8} , on considère un développement de Taylor de $(1 + c_{33}/C)^{-1}$ en fonction de c_{33}/C . L'expression totale de H peut alors s'écrire :

$$H_{\text{total}} = \frac{MR_e^2}{C} J_2_{\text{total}} \left(1 - \frac{c_{33}}{C} + \left(\frac{c_{33}}{C} \right)^2 + \dots \right) \quad (3.34)$$

où $MR_e^2/C \times (c_{33}/C)^n J_2_{\text{total}}$ pour $n \geq 1$ est au maximum de l'ordre de 10^{-11} . Dans ce cas, en considérant séparément les parties constantes et variables dans Eq. (3.34), puis en tenant compte de Eq. (3.32), on obtient :

$$\Delta H = \frac{MR_e^2}{C} \Delta J_2 = -\sqrt{5} \frac{MR_e^2}{C} \Delta \bar{C}_{20} \quad (3.35)$$

où $\Delta J_2 = -\Delta C_{20} = -\sqrt{5} \Delta \bar{C}_{20}$ correspond aux variations du coefficient de Stokes J_2 . De manière générale, on écrit : $\Delta J_2 \propto c_{33}/C$ (Lambeck 1988; Eq. (3.12)).

Variations temporelles de H : problème de détermination - Théorie de Clairaut

En se référant à l'équation (3.35), afin de déterminer les variations temporelles de H à partir de ΔC_{20} , il nous faut l'expression de C/MR_e^2 . Cependant, ces trois valeurs M , R_e et C ne sont pas déterminées précisément de manière séparée. Habituellement, les valeurs de J_2 et H sont directement utilisées afin de déduire la valeur de ce rapport. Pour notre problème, il nous faut utiliser la théorie de Clairaut, impliquant quelques hypothèses simplificatrices : on suppose que la Terre est en équilibre hydrostatique et qu'elle est un ellipsoïde de révolution. On néglige alors les termes d'ordre supérieur à l'aplatissement.

On peut rappeler l'équation d'équilibre hydrostatique, dans le cas où les forces considérées dépendent d'un potentiel V , où p est la pression et μ est la densité du corps :

$$dp = \mu dV \quad (3.36)$$

a) Aplatissement ϵ de la surface équipotentielle d'un fluide en rotation

Pour le développement de ce paragraphe, nous nous sommes référés à Levallois (Tome 3, 1970) et à Melchior (Tome 2, 1971). Le potentiel de pesanteur d'un sphéroïde de révolution limité par une surface de niveau s'écrit à l'ordre 2 :

$$V(r, \lambda, \theta) = \frac{GM}{r} \left[1 - \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 J_2 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right] + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (3.37)$$

où $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ est la constante gravitationnelle, $\omega = 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$ la vitesse moyenne de rotation terrestre et (r, λ, θ) la rayon, la longitude et la colatitude au point considéré. Au rayon équatorial ($r = R_e$ et $\theta = \pi/2$) le potentiel est le suivant :

$$V_e = \frac{GM}{R_e} \left[1 + \frac{J_2}{2} \right] + \frac{1}{2} \omega^2 R_e^2 \quad (3.38)$$

et au rayon polaire ($r = R_p$ et $\theta = 0$) on a :

$$V_p = \frac{GM}{R_p} \left[1 - \left(\frac{R_e}{R_p} \right)^2 J_2 \right] \quad (3.39)$$

La définition Eq. (H.1) de l'aplatissement géométrique terrestre ϵ a déjà été donnée en Annexe H. Nous avons ainsi :

$$R_p = R_e (1 - \epsilon) \quad (3.40)$$

Par conséquent, au premier ordre, on peut écrire :

$$R_p \simeq \frac{R_e}{1 + \epsilon} \quad (3.41)$$

De plus, une surface équipotentielle correspond à $V = \text{Constante}$, donc $V_e = V_p = \text{Constante}$. Par conséquent, grâce à Eq. (3.38), Eq. (3.39) et Eq. (3.41), en ne considérant pas les termes en ϵ^2 et ϵJ_2 du second ordre, nous pouvons écrire au premier ordre :

$$\frac{\omega^2 R_e^2}{2} = \frac{GM}{R_e} \left(\epsilon - \frac{3}{2} J_2 \right) \quad (3.42)$$

Cela nous permet de déduire l'aplatissement géométrique de la surface équipotentielle en fonction de quantités connues. La **première relation de Clairaut**, valable au premier ordre, est ainsi :

$$\epsilon = \frac{q}{2} + \frac{3}{2} J_2 \quad (3.43)$$

où q , représentant le rapport entre la force centrifuge et la pesanteur à la surface d'une sphère de rayon R_e , est appelé constante géodynamique :

$$\begin{aligned} q &= \frac{\omega^2 R_e^3}{GM} \\ &= 3.461391 \cdot 10^{-3} \text{ , selon l'IAG (Groten 1999)} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Nous pouvons aussi conserver tous les termes de l'ordre du carré de l'aplatissement ϵ , et obtenir alors la formule du second ordre (Melchior, Tome 2, 1971) :

$$\epsilon = \frac{q}{2} + \frac{3}{2} J_2 + \frac{9}{8} J_2^2 - \frac{3}{14} J_2 q - \frac{11}{56} q^2 \quad (3.45)$$

quant à la formule d'ordre 3 (Levallois, Tome 3, 1970), elle est la suivante :

$$\epsilon = \frac{q}{2} + \frac{3}{2} J_2 + \frac{9}{8} J_2^2 - \frac{3}{14} J_2 q - \frac{11}{56} q^2 + \frac{27}{16} J_2^3 + \frac{9}{98} q J_2^2 + \frac{93}{784} q^2 J_2 + \frac{9}{98} q^3 \quad (3.46)$$

b) Expression du rapport C/MR_e^2

Dans ce paragraphe, nous nous référons à Melchior (Tome 3, 1972), en ce qui concerne la théorie de Clairaut pour une masse fluide hétérogène discontinue en rotation. Nous rappelons l'équation de Radau (voir Eq. (70) dans Melchior) :

$$\frac{\epsilon - q/2}{H} = 1 - \frac{2}{5} \sqrt{1 + \eta} = \frac{1}{\lambda} \quad (3.47)$$

où λ est appelé paramètre de d'Alembert et η le paramètre de Radau, tel que :

$$\eta = \frac{5q}{2\epsilon} - 2 \quad (3.48)$$

En remplaçant dans Eq. (3.47) ϵ par Eq. (3.43), on obtient :

$$\frac{C}{MR_e^2} = \frac{2}{3\lambda} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{5} \sqrt{1 + \eta} \right) \quad (3.49)$$

Nos tests ont montré qu'utiliser Eq. (3.45) pour l'expression de ϵ dans Eq. (3.48) donne de meilleurs résultats (en ce sens où l'on s'éloigne alors moins de la valeur IAG 1999 (Groten 1999) de $\frac{C}{MR_e^2}$).

Nous présentons dans la Table 3.2 les différentes valeurs de H obtenues. Nous notons (i) H^* la valeur obtenue par la méthode de Clairaut détaillée ci-dessus, et (ii) H^{**} celle utilisant directement les valeurs numériques de R_e , C et M . Ces deux valeurs sont calculées grâce à Eq. (3.32) et à une valeur pour J_2 égale à 1.0826358×10^{-3} (valeur de la partie constante de J_2 issue de nos données (Biancale et al. 2002)). Elles sont différentes des valeurs de H de l'IAG (Groten 1999) et de MHB (Mathews et al. 2002) généralement utilisées. Ceci est dû à (i) l'hypothèse d'équilibre hydrostatique dans la théorie de Clairaut, et (ii) la mauvaise détermination des valeurs de R_e , C et M . Ceci introduira donc des erreurs dans la détermination de ΔH , que nous allons détailler dans le paragraphe suivant.

Par la suite, nous utiliserons la valeur de $C/(MR_e^2)$ déterminée grâce à la théorie de Clairaut, notée avec une (*) dans la Table 3.2. La valeur de H correspondante est : $H^* = 3.26715240 \times 10^{-3}$.

TAB. 3.2 – Comparaison de différentes valeurs du coefficient $C/(MR_e^2)$ et de la partie constante de H : (1) Valeurs de l'IAG (Groten 1999) - (2) Valeurs MHB (Mathews et al. 2002) - (3) Partie constante H^{**} obtenue avec Eq. (3.32) utilisant les valeurs de l'IAG pour M , R_e et C - (4) Méthode de "Clairaut", supposant l'équilibre hydrostatique. Les deux dernières méthodes utilisent : $\bar{C}_{20} = -4.841695 \times 10^{-4}$ dans Eq. (3.32) (i.e. $J_2 = 1.0826358 \times 10^{-3}$). Le sens du calcul dans chaque cas est indiqué par les flèches.

	(1) IAG (1999)	(2) MHB 2000	(3) Valeurs IAG pour M , R_e and C	(4) Théorie de Clairaut
$C/(MR_e^2)$	0.330701 $\pm 2 \times 10^{-6}$	0.330698	0.330722**	0.331370*
	↑	↑	↓	↓
H	3.273763×10^{-3} $\pm 2 \times 10^{-8}$	$3.27379492 \times 10^{-3}$	$H^{**} = 3.27355562 \times 10^{-3}$	$H^* = 3.26715240 \times 10^{-3}$

c) Estimation de l'erreur

Nous pouvons estimer l'erreur introduite dans la détermination de ΔH par l'utilisation de la théorie de Clairaut détaillée plus haut. En effet, si nous considérons la valeur MHB comme la plus réaliste pour H (voir Table 3.2), l'erreur relative faite sur le calcul de H^* est :

$$\sigma_H = \frac{H_{\text{MHB}} - H^*}{H_{\text{MHB}}} \simeq 2 \times 10^{-3} \quad (3.50)$$

Nous estimons ainsi que l'erreur est de l'ordre de 0.2 %. Par conséquent, en calculant la partie variable de H avec les données de ΔC_{20} , on engendre une erreur maximale de l'ordre de :

$$\begin{aligned} |\Delta H_{\text{real}} - \Delta H^*| &\simeq (2 \times 10^{-3}) \times (2 \times 10^{-9}) \\ &\simeq 4 \times 10^{-12} \end{aligned} \quad (3.51)$$

en supposant que la valeur maximale de ΔH est de l'ordre de 2×10^{-9} (issue du ΔC_{20} provenant des marées solides ; voir Fig. 7.8 et §7.2.2). Ainsi, si on tient compte des valeurs de ΔH et de leur précision, on peut alors considérer que l'erreur induite est négligeable. On peut donc utiliser la valeur de $C/(M R_e^2)$ déduite de la théorie de Clairaut afin de déduire ΔH à partir de $\Delta J_2 = -\Delta C_{20}$.

Méthode pour résoudre les équations de la précession basées sur des valeurs de ΔH

Nous nous sommes basés pour cette étude sur l'article de Capitaine et al. (2003), noté dans la suite P03, afin de résoudre les équations différentielles Eq. (3.22) en remplaçant H par $H + \Delta H$ (en utilisant Eq. (3.23)-(3.26) et Eq. (3.31)). On commence par utiliser les valeurs initiales de P03 pour les variables ω_A , ψ_A , ϵ_A , χ_A et p_A , qui sont représentées par des polynômes du temps et on se base sur les valeurs numériques détaillées dans la Table 3.3. On résout Eq. (3.22) en même temps que les autres équations (e.g. voir Eq. (26) et Eq. (28) dans P03) à l'aide du logiciel GREGOIRE (Chapront 2003) qui traite des séries de Fourier et de Poisson. On itère le processus jusqu'à ce que l'on obtienne la convergence de la solution.

TAB. 3.3 – Valeurs numériques utilisées dans cette étude : H , ψ_1 et ω_1 sont des constantes d'intégration (Capitaine et al. 2003).

Valeurs initiales à J2000.0	
H	$H_{\text{MHB}} = 3.27379492 \times 10^{-3}$
ψ_1	5038".481507/cy
ω_1	-0".02575/cy
p_1	5028".796195/cy
χ_1	10".556403/cy
ϵ_0	84381".406 = 23°26'21".406
Contributions à la vitesse de précession en longitude (en "/cy)	
Terme lunisolaire du 1 ^{er} ordre	$5494.062986 \times \cos \epsilon_0 \simeq 5040.7047$
Terme planétaire du 1 ^{er} ordre	0.031
Précession géodésique	-1.919882

De manière plus pratique, nous montrerons dans la troisième partie de la thèse (chapitre 11) comment nous avons exactement procédé avec l’ajustement des variations temporelles de H grâce aux données de ΔC_{20} , afin de les introduire dans les équations de la précession et d’en déduire ce que cela peut nous apporter comme informations nouvelles.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons explicité les liens existant entre le champ de gravité et les fluctuations de la rotation terrestre. Plus précisément, nous avons établi les relations entre les coefficients de Stokes du potentiel gravitationnel terrestre de degré 2 et les moments d’inertie de la Terre (§3.2), puis nous avons démontré que ces derniers pouvaient être reliés aux variations des paramètres d’orientation terrestre (§3.3).

L’excès de la longueur du jour $\Delta(LOD)$ dépend notamment des variations ΔC_{20} du coefficient du potentiel gravitationnel terrestre de degré 2 et d’ordre 0, par l’intermédiaire des variations du moment principal d’inertie polaire I_{33} (§3.3.1). Le mouvement du pôle p ($p = x_p - i y_p$) et les coefficients de Stokes C_{21} et S_{21} du potentiel gravitationnel terrestre sont liés dans une équation différentielle (§3.3.2) où interviennent les fonctions d’excitation effectives des couches fluides de la Terre. Enfin, nous avons établi la relation entre les équations de la précession de l’équateur et l’ellipticité dynamique terrestre H . Ce dernier paramètre étant lié au coefficient C_{20} , il est possible d’introduire l’influence de ΔC_{20} dans les équations de la précession-nutation, par l’intermédiaire des variations ΔH (§3.3.3).

Ces trois points théoriques seront confrontés aux observations (i.e. champ de gravité variable, EOP ou encore moments cinétique des couches fluides) dans la troisième partie de cette thèse.

Chapitre 4

Conclusion de la Première Partie

Dans cette première partie, nous avons détaillé la paramétrisation de l'orientation terrestre (avec 5 EOP), ainsi que sa modélisation grâce aux équations de Liouville (pour une Terre non rigide déformable) qui permettent d'étudier les influences géophysiques sur la rotation terrestre. Nous avons aussi rappelé comment les variations du champ de gravité étaient déterminées à travers l'ajustement de modèles d'orbites avec des mesures de positionnement des satellites artificiels. Nous avons ensuite montré dans le Chapitre 3 comment ces variations temporelles du champ de gravité sont reliées aux paramètres d'orientation terrestre.

De nos jours, on a atteint une limite dans la modélisation de la rotation de la Terre basée sur les mesures astrométriques et géodésiques. Les mesures de variations du champ de gravité terrestre concernant des redistributions de masses dans la Terre globale, nous allons donc tester si elles peuvent nous permettre de compléter la modélisation de la rotation de la Terre (effets hydrologiques, tremblements de terre, etc ...).

Deuxième partie

Missions CHAMP et GRACE : études numériques et utilisation de données géodésiques

Chapitre 5

Missions satellitaires gravimétriques récentes

5.1 Introduction

Depuis la fin des années 1950 et le lancement des satellites Spoutnik par les soviétiques, de nombreux engins spatiaux ont été envoyés en orbite autour de la Terre. Certains de ces satellites, notamment ceux dont le positionnement est réalisé par télémétrie laser (voir Table 5.1 et Fig. 5.1), sont appropriés à la détermination du champ de gravité de la Terre (en pratique, détermination des coefficients de Stokes). Précisons que les fonctions harmoniques sphériques (adaptées à la représentation d'un champ proche de la structure sphérique ; développement du potentiel de gravité) définissent tout un spectre de longueurs d'onde indiquées par le degré n et l'ordre m des harmoniques : la longueur d'onde se déduit de la longueur de la circonférence divisée par le degré selon la formule :

$$\lambda = \frac{40000}{n} \text{ km} \quad (5.1)$$

L'ordre m indique la fréquence des déformations en longitude.

L'étude de l'évolution des paramètres orbitaux des satellites dont le positionnement est mesuré par télémétrie laser (voir Fig. 5.2) nous donne accès également aux variations temporelles de certains des coefficients harmoniques sphériques du champ (voir § 2.4). Cependant, ces satellites étant situés de manière générale à haute altitude ($\simeq 5000$ km), ils sont moins sensibles aux coefficients de haut degré du champ de gravité (longueurs d'onde plus faibles) reflétant des phénomènes de plus petite échelle spatiale (voir Eq. (5.1)).

Par conséquent, l'arrivée des satellites CHAMP et GRACE est importante dans la détermination de ces variations temporelles des coefficients du champ de gravité terrestre :

(i) Tout d'abord ces satellites sont situés en altitude basse. Ils subissent donc d'importants frottements atmosphériques, phénomènes assez mal modélisés jusqu'à présent. Cependant, ils possèdent des accéléromètres embarqués qui permettent de mesurer en temps réel ces forces de frottement subies par le satellite. Ainsi, situés bas en altitude, ils permettent de mieux déterminer les coefficients du champ de gravité terrestre de plus haut degré.

(ii) De plus, le satellite GRACE est en fait composé de deux satellites co-orbitaux, délivrant une mesure de distance inter-satellite. Ainsi, on peut atteindre dorénavant les

variations des coefficients du champ de gravité terrestre par la mesure directe de la variation de distance inter-satellite entre GRACE-A et GRACE-B, induite par les variations de gravité terrestre sous-jacentes.

Nous allons donc détailler dans les parties 5.2 et 5.3 les missions CHAMP et GRACE, respectivement.

TAB. 5.1 – Liste de satellites artificiels dont le positionnement est mesuré par télémétrie laser et dont l’étude permet de déterminer le champ de gravité terrestre (GRIM5).

Nom du satellite	Date du lancement	Altitude (km)	Inclinaison (degrés)	Excentricité	Organisme (ou Pays)
Starlette	Février 1975	815	50	0.021	CNES
LAGEOS-1	Mars 1976	5850	110	0.005	USA
Ajisai	Aout 1986	1485	50	0.001	Japon
ERS-1	Juillet 1991	780	99	0.001	ESA
LAGEOS-2	Octobre 1992	5625	53	0.014	USA et Italie
TOPEX	Aout 1992	1350	66	0.000	NASA et CNES
Stella	Septembre 1993	815	99	0.021	CNES
ERS-2	Avril 1995	800	99	0.001	ESA
CHAMP	Juillet 2000	474	87	0.004	GFZ
JASON	2001	1336	66	0.000	NASA et CNES
GRACE	Mars 2002	485-500	89	<0.005	NASA et GFZ
ENVISAT	Mars 2002	800	98	0.001	ESA

5.2 Mission CHAMP

Le satellite CHAMP (*CHALLENGING Minisatellite Payload for geoscience and application* ; voir Fig. 5.3) a été lancé le 15 Juillet 2000, depuis la base de Plesetsk en Russie. C’est une mission visant à envoyer un satellite en orbite basse dans l’atmosphère, afin d’atteindre de plus hauts degrés dans les coefficients du champ de gravité terrestre, grâce à un accéléromètre embarqué mesurant en temps réel les forces surfaciques agissant sur le satellite. Le but d’une telle mission est de mieux déterminer le champ de gravité terrestre. Elle a été initiée au GFZ-Potsdam (*GeoForschungsZentrum Potsdam*, Allemagne) par le Professeur Christoph Reigber, en collaboration avec d’autres laboratoires étrangers. Le CNES a notamment participé en fournissant l’accéléromètre STAR (Space Triaxial Accelerometer for Research applications) avec l’ONERA (Office National d’Etudes et de Recherches Aérospatiales), mais aussi en participant au traitement des données CHAMP ainsi qu’à l’exploitation de celles-ci dans différents domaines de la science.

Cette mission comporte également des expériences concernant le champ magnétique terrestre, l’ionosphère et l’atmosphère.

Détaillons maintenant les instruments de la mission CHAMP permettant de déterminer le champ de gravité terrestre, puis rappelons les enjeux scientifiques ainsi que les résultats obtenus (voir Reigber et al. 2002a).

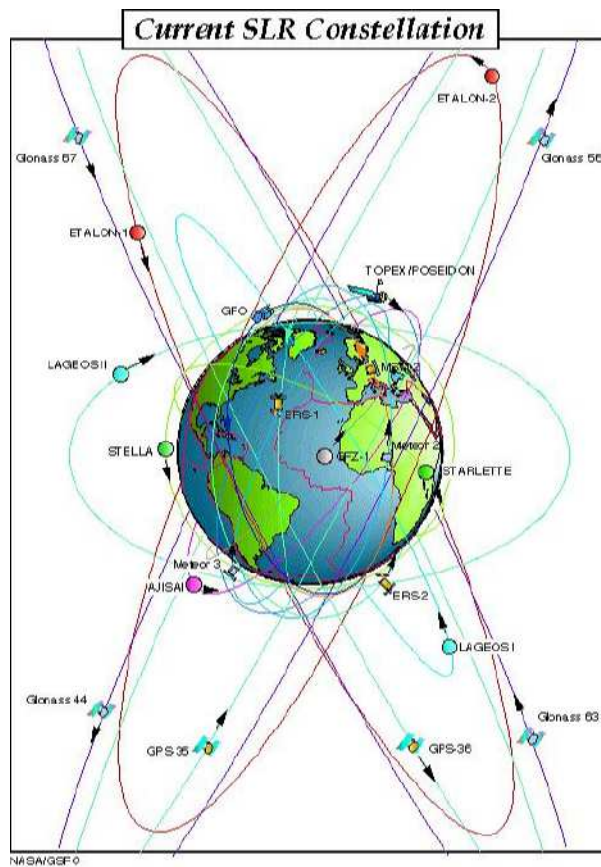


FIG. 5.1 – Constellation de satellites artificiels dont la mesure du positionnement est faite par télémétrie laser sur satellite, nous donnant la détermination des coefficients du potentiel de gravité terrestre (source ILRS).

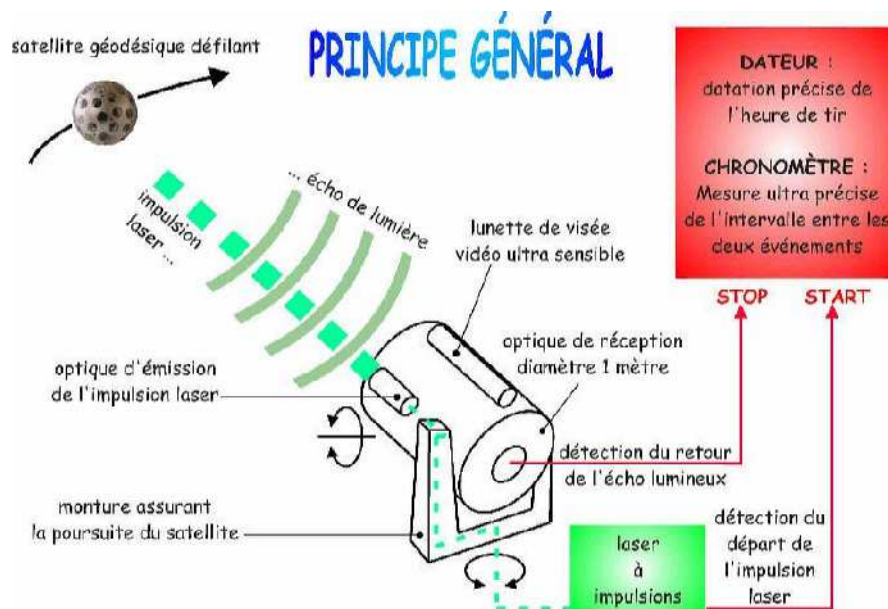


FIG. 5.2 – Technique de télémétrie laser sur satellite, permettant d'obtenir la distance du satellite depuis la station terrestre de mesure (source ILRS).

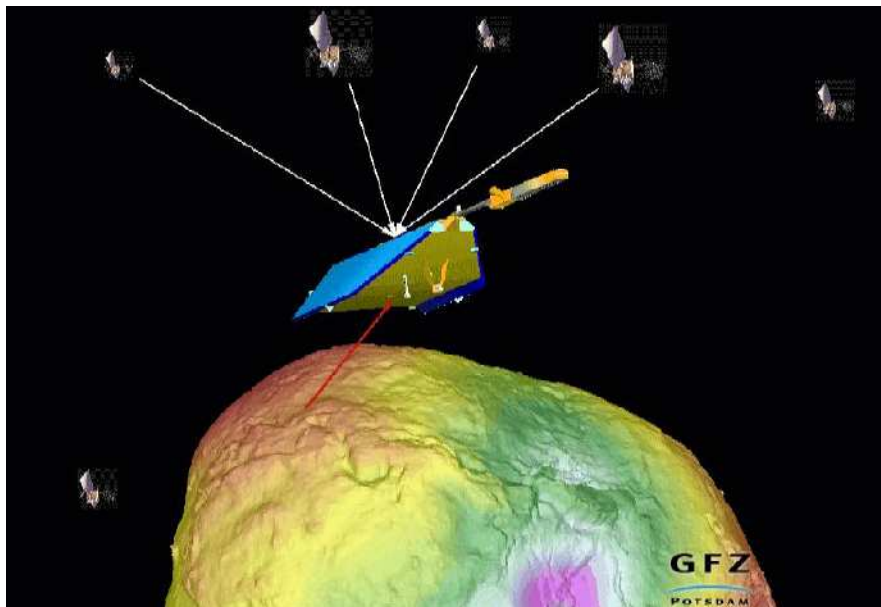


FIG. 5.3 – Satellite artificiel CHAMP.

5.2.1 Instruments à bord

Les instruments embarqués sur le satellite CHAMP (voir Fig. 5.4) permettant la détermination du champ de gravité terrestre sont les suivants :

- **Accéléromètre STAR (*Spatial Triaxial Accelerometer for Research*)**

Placé au centre de gravité du satellite, il permet la mesure en temps réel des forces surfaciques (i.e. non gravitationnelles) agissant sur le satellite, tels les frottements atmosphériques, la pression de radiation solaire ou l'albédo terrestre. Cette mesure est basée sur la suspension électrostatique, donnant accès à la mesure de la variation de position et d'accélération d'une masse-témoin placée dans un compartiment isolé.

Ajoutons qu'une des électrodes de l'accéléromètre embarqué sur CHAMP et permettant de positionner la masse témoin est devenue défectueuse en cours de mission (Perosanz et al. 2003). Par conséquent, il a fallu faire de nouveaux calculs afin d'essayer tout de même d'obtenir un bon positionnement et de ne pas perdre le bénéfice de l'accéléromètre.

- **Récepteur GPS (TRSR-2) et Réflecteur Laser**

Le récepteur GPS est fourni par la NASA et a été fabriqué au JPL (*Jet Propulsion Laboratory*, USA). Le réflecteur laser est fourni par le GFZ. Ils permettent tous deux le suivi et le positionnement précis du satellite, ainsi que des études sur l'atmosphère.

5.2.2 Buts scientifiques et résultats

Les trois buts principaux de la mission CHAMP étaient de fournir : (i) les caractéristiques globales et de haute précision à grande longueur d'onde du champ de gravité terrestre statique, ainsi que les variations temporelles de ce champ, puis (ii) des estimations globales du champ magnétique terrestre avec une précision jamais atteinte, ainsi que les variations spatiales et temporelles des composantes de ce champ, et enfin (iii) des données bien dis-

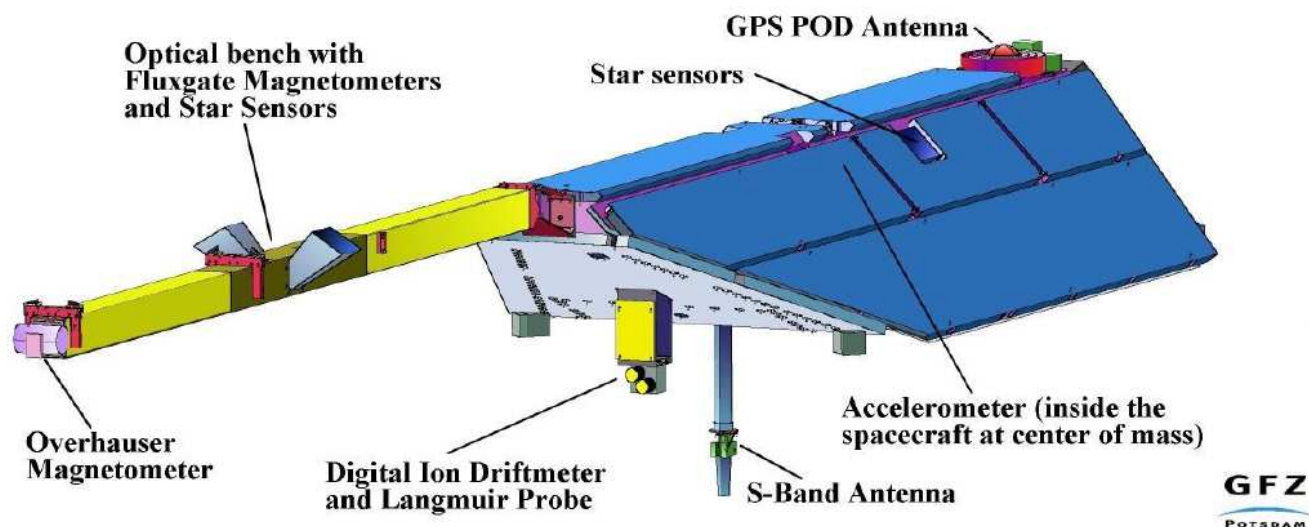


FIG. 5.4 – Instruments embarqués sur le satellite CHAMP.

tribuées de réfraction des signaux GPS causée par l'atmosphère et l'ionosphère, pouvant être transposées en données de température, de vapeur d'eau et de teneur en électrons.

Avec sa charge utile multifonctionnelle, CHAMP permet de contribuer à différents champs de la géodésie et de la géophysique, comme :

- La Géosphère : Etude de la structure et des mécanismes de la Terre solide, du noyau jusqu'à la croûte, en passant par le manteau, ainsi que des interactions entre océan et atmosphère.
- L'Hydrosphère : Obtenir une meilleure surveillance des courants marins, des changements globaux du niveau des mers, ou bien des changements à court terme dans l'équilibre global des eaux terrestres, aussi bien qu'étudier les interactions du temps avec le climat.
- L'Atmosphère : Sonder globalement les couches verticales de l'atmosphère, afin d'étudier les gaz neutres et ionisés de l'enveloppe gazeuse terrestre, ainsi qu'étudier les relations entre climat sur Terre et climat dans l'espace.

Si nous nous concentrons sur la partie gravimétrique de la mission CHAMP, le GFZ et le GRGS (Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale) ont établi à plusieurs reprises depuis le début de la mission des champs de gravité statiques (champs de gravité nommés (i) EIGEN-1S, voir Reigber et al. 2002b ; ou bien (ii) EIGEN-2, Reigber et al. 2003 ; ou encore (iii) EIGEN-CHAMP03S, Reigber et al. 2004a) se basant sur les données du satellite CHAMP (voir Fig. 5.5). Ils s'avèrent plus précis que le précédent champ GRIM5 basé sur des données de positionnement par télémétrie laser d'une combinaison de plusieurs satellites, dont Lageos I, Stella, Starlette ou Lageos II (Biancale et al. 2000 ; Gruber et al. 2000). Ils sont cependant bien moins précis que le nouveau champ de gravité statique que le satellite GRACE permet de déterminer (voir Fig. 5.6) et dont nous reparlerons plus loin.

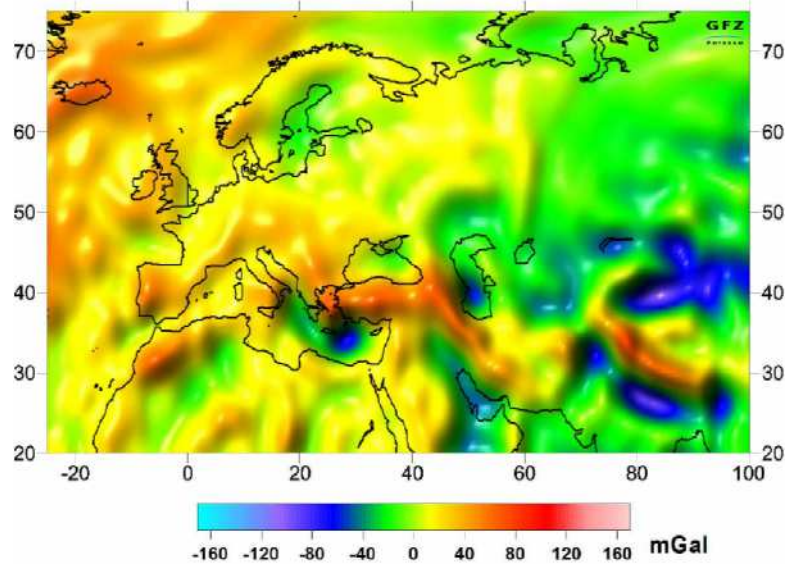


FIG. 5.5 – Dernier modèle GFZ/GRGS de champ de gravité statique basé sur les données du satellite CHAMP (anomalies de gravité) : EIGEN-CHAMP03S (Source : <http://op.gfz-potsdam.de/champ/results>).

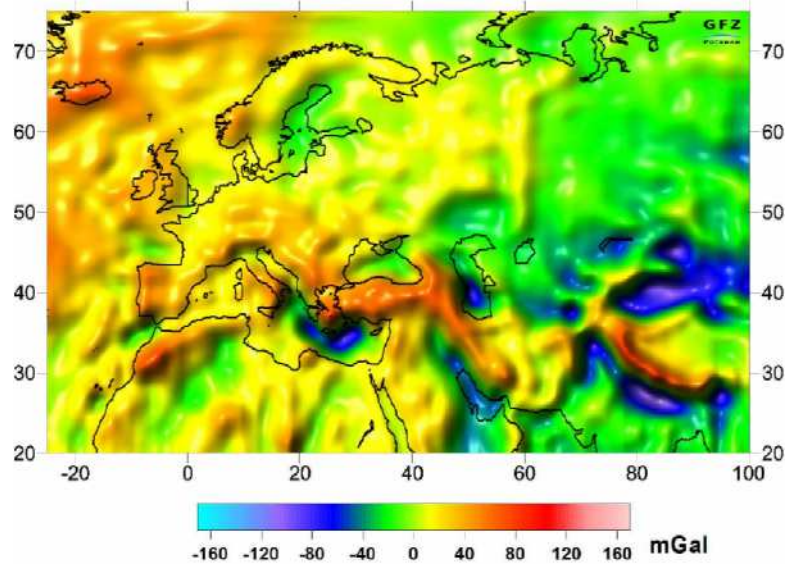


FIG. 5.6 – Dernier modèle de champ de gravité statique basé sur les données du satellite GRACE seul (anomalies de gravité) : EIGEN-GRACE02S (voir Reigber et al. 2004b) (Source : <http://op.gfz-potsdam.de/grace/results>).

5.3 Mission GRACE

Le satellite GRACE (*Gravity Recovery And Climate Experiment* ; voir Fig. 5.7) a été lancé le 16 Mars 2002 depuis la base de Plesetsk en Russie, pour une période d'exploitation de 5 ans. C'est un programme initialement de la NASA visant à déterminer de manière plus précise que jamais le champ de gravité terrestre, ainsi que ses variations temporelles. Il comporte également des mesures atmosphériques en rapport avec l'ionosphère et la troposphère (Jeongrae 2000 et Thomas 1999).

Deux satellites d'altitude basse (de l'ordre de 400 km) sont sur la même orbite quasi-circulaire et quasi-polaire, séparés d'environ 100 à 200 km. Ils échangent des signaux micro-ondes afin de mesurer la variation de distance et vitesse inter-satellite. Ils disposent de plus d'un accéléromètre Super-STAR afin de mesurer en "temps réel" les forces surfaciques perturbant leur orbite.

Habituellement, les satellites utilisés pour la détermination du champ de gravité ne sont pas sur des orbites aussi basses, car on ne sait pas bien modéliser les forces surfaciques, ce qui rend difficile la restitution des paramètres physiques voulus. Cependant, le but est d'obtenir avec une précision sans précédent le champ de gravité terrestre, ce qui passe forcément par l'utilisation d'une orbite satellitale basse (le satellite est ainsi plus sensible à l'attraction terrestre gravitationnelle). Afin de remédier au problème des forces surfaciques, on utilise l'accéléromètre superSTAR héritier de STAR (déjà cité précédemment), qui permettra une détermination de ces forces, donc une meilleure restitution de l'orbite.

Détaillons maintenant les instruments de la mission GRACE permettant de déterminer le champ de gravité terrestre statique et variable, puis rappelons les enjeux scientifiques ainsi que les résultats obtenus (voir Tapley et al. 2004a).

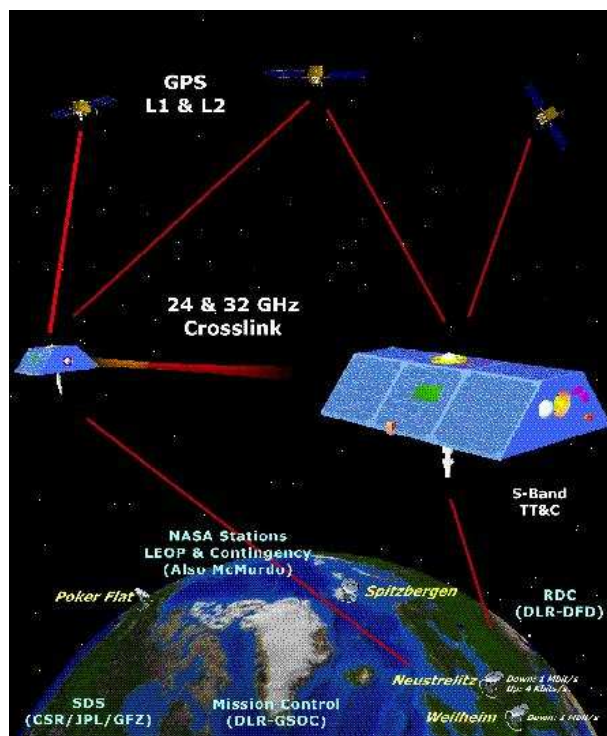


FIG. 5.7 – Les deux satellites GRACE sur la même orbite.

5.3.1 Instruments à bord

Les produits principaux de cette mission sont les variations de distance inter-satellite, traduisant les variations de perturbations sur les satellites. Pour cela, les instruments utilisés sont les suivants :

- **Mesure de distance inter-satellite "biaisée" en bande K**

Des micro-ondes sont envoyées par une antenne depuis chacun des deux satellites vers l'autre. Ceci permet de mesurer la variation de distance inter-satellite. On s'intéresse au décalage de phase des signaux, avec deux fréquences $f_1 = 24$ GHz et $f_2 = 32$ GHz différentes, afin de s'affranchir du biais provenant de l'ionosphère. Afin d'éviter des problèmes entre signaux envoyés et reçus par un même satellite, les fréquences de chacun des deux sont décalées de 500 MHz.

- **Accéléromètre**

L'accéléromètre SuperSTAR a été fourni par l'ONERA (France) et est une version modifiée de STAR. Nous avons donc déjà détaillé le fonctionnement d'un tel instrument lorsque nous avons abordé la mission CHAMP. Cet instrument-là permet des mesures encore plus précises, grâce à (i) la conception et à la forme des deux satellites qui tentent d'atténuer au mieux les vibrations, ainsi qu'à (ii) la grande stabilité en température établie dans ces satellites.

- **Récepteur GPS et Réflecteur Laser**

Les techniques GPS et de télémétrie Laser sur satellite permettent la mesure du positionnement de chacun des deux satellites à chaque instant. Tout comme pour le satellite CHAMP, ils sont fournis respectivement par le JPL (USA) et le GFZ (Allemagne) et ont également pour application l'étude de l'atmosphère.

- **Censeur stellaire**

Permet de déterminer le positionnement du satellite relativement à l'espace. L'attitude du satellite est déterminée précisément notamment grâce à un assemblage de caméras repérant les satellites par rapport aux étoiles (*Star Tracker*), afin entre autre d'interpréter correctement les résultats des accéléromètres.

Les biais ou sources d'erreurs à prendre en compte pour ces deux satellites (tout comme pour CHAMP, également) sont les suivants : (i) le bruit lors du positionnement des satellites, puis (ii) le bruit de l'accéléromètre, et pour finir (iii) le bruit résiduel induit par l'ionosphère et l'atmosphère (sachant que la correction principale à ces effets est effectuée en utilisant deux fréquences différentes lors de l'émission et de la réception des signaux). L'étude du positionnement des deux satellites engendre des erreurs provenant des différents types de mesures : (a) l'instabilité de l'oscillateur (i.e. erreur de phase), (b) le bruit du système receveur, (c) l'erreur d'horloge des deux satellites, et enfin (d) le bruit dû aux signaux indirects reflétés autour de l'antenne.

5.3.2 Buts scientifiques et résultats

Le premier objectif scientifique de la mission GRACE est de fournir avec une précision jamais atteinte le champ de gravité statique et variable à haute résolution, de manière à étudier les variations des eaux continentales et l'hydrosphère. Ensuite, le deuxième objectif est la mesure de plusieurs centaines de profils (i) d'excès de temps de parcours et (ii) d'angles de courbure des mesures GPS, dûs à l'atmosphère et à l'ionosphère, par jour. Ceux-ci peuvent être convertis respectivement en (i) concentration totale en électrons et (ii) réfractivité.

Les applications scientifiques typiques de GRACE concernent le géoïde moyen (voir Fig. 5.6), qui permettra des avancées significatives en océanographie (en combinant ce savoir avec des données d'altimétrie et in-situ), en géodésie et en science de la Terre solide. En effet, ceci pourra permettre par exemple (i) de mieux appréhender les changements à long terme du niveau des mers, et (ii) d'améliorer le positionnement des satellites ou la détermination d'orbites.

La détermination des variations temporelles des coefficients du champ de gravité terrestre pourra permettre de mieux comprendre les processus variables entrant en jeu en océanographie et en hydrologie (voir Ramillien et al. 2004, Wahr et al. 2004, Tapley et al. 2004b, Chambers et al. 2004), en glaciologie, ou dans les sciences de la Terre solide. En effet, ceci pourra permettre par exemple (i) de mieux appréhender les changements de circulation océanique profonde ou de stockage de l'eau dans les glaciers, (ii) d'étudier plus avant les variations de densité du manteau, de la lithosphère, ou encore (iii) d'améliorer notre connaissance du rebond postglaciaire (voir Velicogna & Wahr 2002).

Les mesures d'occultation GPS et leurs quantités dérivées (température et vapeur d'eau) apporteront leur contribution aux études sur la variabilité du climat. De plus, elles permettront d'obtenir une résolution plus fine de la structure de l'ionosphère.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit les missions CHAMP et GRACE, lancées respectivement en Juillet 2000 et Mars 2002. Ce sont des missions gravimétriques ayant pour but la détermination du champ de gravité terrestre statique moyen avec une précision sans précédent. Ceci est rendu possible par un meilleur suivi de l'orbite de ces satellites grâce à la technique GPS, mais aussi par de nouvelles technologies embarquées sur ces satellites en altitude basse (e.g. accéléromètres et mesure inter-satellite pour GRACE).

De plus, GRACE permet d'obtenir les variations temporelles de ce champ de gravité, domaine en plein essor et actuellement très étudié. Ceci permet d'appréhender les phénomènes variables dans le temps, et le satellite GRACE a pour but d'étudier surtout les redistributions de masses liées à l'hydrosphère et aux eaux continentales.

Cependant, du fait des caractéristiques de son orbite, GRACE n'est pas aussi performant que la télémétrie laser sur satellite pour déterminer les variations du coefficient de bas degré C_{20} du champ de gravité terrestre. En revanche, ces satellites en orbite basse sont adaptés à l'amélioration de la connaissance du champ de gravité pour les autres coefficients. Dans le chapitre 7, nous utiliserons une redétermination de la partie variable du champ de gravité (degré 2), basée sur l'utilisation des satellites Lageos I et II, et nous contraindrons les coefficients de degré supérieur ou égal à 3 par des données issues de la mission GRACE.

Chapitre 6

Comparaison de différentes méthodes d'intégration numérique pour le calcul d'orbites

6.1 Introduction

Dans le cadre du lancement du satellite GRACE, nous avons testé l'efficacité de l'intégrateur numérique implémenté dans le logiciel GINS (logiciel d'extrapolation d'orbite du GRGS/CNES). Cette méthode d'intégration numérique pour le calcul d'orbite, nommée méthode de Cowell, est la plus couramment utilisée en orbitographie. La précision annoncée pour les mesures inter-satellites de GRACE est de l'ordre de 10 micromètres. Afin de ne pas perdre le bénéfice de cette précision, on se doit d'avoir une précision rendue lors de l'intégration numérique (pour le calcul d'orbite) au moins 10 fois plus petite.

Nous allons donc aborder de manière théorique le cadre de l'intégration numérique pour le calcul d'orbites, puis présenter les deux méthodes que nous comparerons par la suite : (i) la méthode de Cowell, la plus communément utilisée, et (ii) la méthode d'Encke, qui est une méthode alternative que nous allons explorer. Nous testerons la précision des erreurs numériques causées par ces deux intégrateurs. Utiliser la méthode d'Encke pour l'intégration numérique dans le calcul d'orbite des deux satellites GRACE permettrait d'intégrer ces deux satellites co-orbitaux en relatif, par rapport à une même orbite analytique moyenne.

6.2 Théorie de l'intégration numérique pour le calcul d'orbites

Pour résoudre numériquement le problème d'intégration d'orbite d'un satellite artificiel, on utilise soit les équations du mouvement Eq. (2.20), soit les équations planétaires de Lagrange Eq. (2.21). En pratique, on utilise le premier cas, cela s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} \ddot{y} &= f(y, \dot{y}, t) \\ y(t_0) &= y_0 \\ \dot{y}(t_0) &= \dot{y}_0 \end{cases} \quad (6.1)$$

où y correspond alors au vecteur position \vec{r} du satellite dans le repère terrestre, et le second membre f dépend des forces perturbatrices agissant sur le satellite (potentiel gravitationnel terrestre, forces surfaciques, etc ...). On intègre de manière numérique. Pour cela, on dispose de deux types de méthodes discrètes différentes (voir Zarrouati 1997, Barriot 1989, et Balmino 1974) : (i) Méthodes "à un pas", ou (ii) Méthodes "multipas" (ou dite "à pas liés").

Tout d'abord, on discrétise l'intervalle de temps $[t_0; T]$ sur lequel on veut étudier la position du satellite. On pose donc : $t_{i+1} = t_i + h$, pour tout $i = 0, \dots, N - 1$, où $N - 1$ correspond au nombre d'intervalles de temps discrétisant l'arc d'orbite étudié et h est appelé le pas de discrétisation. Nous avons alors : $h = (T - t_0)/N$ et $t_N = T$. Le but est alors de chercher une solution approchée y_i de la solution de l'équation à résoudre, en chaque point t_i , de telle sorte que : $y_i \simeq y(t_i)$, pour tout $i = 1, \dots, N$.

Détaillons maintenant théoriquement ces deux types de méthodes, que sont la méthode "à un pas" et celle "à pas liés".

Méthodes d'intégration numérique dites "à un pas"

On peut dédoubler l'équation (6.1) en deux équations du premier ordre :

$$\begin{aligned} u &= y' \\ u' &= f(t, u) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Les méthodes à un pas sont alors caractérisées par le fait que u_{i+1} est calculé à partir de t_i , u_i et h :

$$u_{i+1} = u_i + h \phi(t_i, u_i, h) \quad (6.3)$$

Autrement dit, on peut écrire :

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h} = \phi(t_i, u_i, h) \quad (6.4)$$

Ceci signifie que l'on approche la dérivée $u'(t_i)$ par le premier membre de Eq. (6.4) et $f(t_i, u(t_i))$ par $\phi(t_i, u_i, h)$. En d'autres termes, choisir une méthode à un pas, c'est choisir une fonction ϕ . On peut construire cette dernière par utilisation des développements de Taylor.

Méthodes d'intégration numérique dites multipas

Sur la base de l'équation (6.2), les méthodes à pas multiples sont caractérisées par le fait que u_{i+k} est calculé à partir de t_{i+k-1} , u_{i+k-1} , h mais aussi de u_{i+k-2} , ..., u_i . On appelle méthode à k pas, une méthode ayant pour forme générale :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_k u_{i+k} + \alpha_{k-1} u_{i+k-1} + \dots + \alpha_0 u_i}{h} &= \sum_{j=0}^k \beta_j f_{j+i} \\ &= \beta_k f_{i+k} + \dots + \beta_0 f_i \end{aligned} \quad (6.5)$$

Il existe deux catégories de méthodes multipas : (i) une méthode consistant à remplacer la fonction $f(t, u(t))$ de l'équation (6.2) par un polynôme d'interpolation, suivie d'une intégration, ou bien (ii) une méthode consistant à approcher la dérivée de $u(t)$ (égale à $f(t, u(t))$) en un point (par l'intermédiaire de développements de Taylor).

6.3 Méthode de Cowell

La méthode de Cowell, proposée par Numerov au 19^{ème} siècle et développée par Cowell (1870-1949), est utilisée pour résoudre numériquement les équations du mouvement. C'est une méthode "multipas" de prédiction-correction, permettant de résoudre les équations différentielles. Elle s'est révélée particulièrement bien adaptée aux problèmes de Mécanique Céleste, notamment car : (i) on garde en mémoire l'information sur les pas précédents (dont le nombre dépend de l'ordre d'intégration choisi), utile pour des interpolations à des dates différentes, et (ii) elle utilise moins de temps CPU qu'une méthode directe.

Nous avons rappelé précédemment les équations du mouvement du satellite :

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) \quad (6.6)$$

où y correspond à \vec{r} (vecteur position du satellite) et f comprend les forces perturbatrices de l'orbite du satellite (voir Eq. (2.20)). Afin de résoudre numériquement ces équations, on discrétise le problème sur l'intervalle d'étude $[t_0; T]$, de telle sorte que :

- $t_{n+1} = t_n + h$ pour tout $n = 0, \dots, N-1$ (ou encore, $t_{n-i} = t_n - i h$ pour tout i)
- $N-1$ est le nombre d'intervalles de temps discrétisant l'arc d'étude
- h est le pas de discrétisation.

Le but est alors de trouver une approximation y_n de la solution y de l'équation (6.6) en tout point t_n compris dans l'intervalle d'étude $[t_0; T]$, de telle sorte que : $y_n \simeq y(t_n)$.

Notons $y_{n-i} \simeq y(t_{n-i})$ et $f_{n-i} = f(t_{n-i}, y_{n-i}, y'_{n-i}) \simeq f(t_{n-i}, y(t_{n-i}), y'(t_{n-i}))$. La méthode des différences finies consiste alors à écrire l'équation (6.6) en tout point t_n , sous la forme :

$$\sum_{i=N}^M a_{-i} y_{n-i} = h^2 \sum_{i=P}^Q b_{-i} f_{n-i} \quad (6.7)$$

où le premier membre est une approximation de $y''(t_n)$ qui provient des développements de Taylor et la somme du second membre est une approximation (avec correction) de $f(t_n, y(t_n), y'(t_n))$. En général, on prend $N = P = -1$, et $M = k$ et $Q = l$ (k et l indices choisis).

Dans un premier temps, on développe $y(t_{n-i})$ autour de t_n , d'où l'on déduit y'_{n-i} et $y''_{n-i} = f_{n-i}$. On intègre ensuite ces développements dans l'équation (6.7), ce qui donne :

$$a_1 y_{n+1} + a_0 y_n + a_{-1} y_{n-1} = h^2 [b_1 f_{n+1} + b_0 f_n + b_{-1} f_{n-1}] \quad (6.8)$$

Ensuite, en identifiant membre à membre, on trouve certaines conditions que doivent remplir les a_i et b_i , ce qui nous donne finalement :

$$\frac{1}{2} y_{n+1} - y_n + \frac{1}{2} y_{n-1} = h^2 \left[\frac{1}{24} f_{n+1} + \frac{10}{24} f_n + \frac{1}{24} f_{n-1} \right] \quad (6.9)$$

Dans cette dernière expression, f_{n+1} intervient, c'est donc une méthode implicite (ou dite méthode de correction). C'est pourquoi il faut au préalable utiliser une méthode explicite (ou dite méthode de prédiction). La manière de procéder est alors la suivante :

1. Méthode de prédiction : Elle nous donne une première évaluation de y_{n+1} , par une formule du style :

$$\sum_{i=-1}^1 a_{-i} y_{n-i} = h^2 \sum_{i=0}^2 b_{-i} f_{n-i} \quad (6.10)$$

ce qui nous donne par exemple au troisième ordre :

$$y_{n+1} - 2 y_n + y_{n-1} = \frac{h^2}{12} [13f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}] \quad (6.11)$$

ou même, plus simplement :

$$y_{n+1} - 2 y_n + y_{n-1} = h^2 f_n . \quad (6.12)$$

On obtient y_{n+1}^0 , qui va nous servir de point de départ pour l'étape suivante.

2. Méthode de correction : Ensuite, on utilise une méthode itérative de correction basée sur une équation du style de (6.9) :

$$y_{n+1}^{(k+1)} - 2 y_n + y_{n-1} = \frac{h^2}{12} [f(t_n, y_{n+1}^{(k)}) + 10 f_n + f_{n-1}] \quad (6.13)$$

de telle sorte que :

$$y_{n+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} y_{n+1}^{(k)} \quad (6.14)$$

Les avantages de la méthode de Cowell sont les suivants :

- Volume de calcul réduit au minimum,
- Appel à la fonction $f(t, y)$ réduit à un seul par pas d'intégration,
- Les k pas d'intégration précédents sont mémorisés (pour de futures interpolations ou évaluations),
- Procédure de prédiction-correction améliorant la fiabilité.

Pour plus de détails sur la méthode de Cowell, on pourra consulter Levallois & Kovalevsky (1971, Tome 4).

6.4 Méthode d'Encke

Sur la base de la méthode de Cowell pour l'intégration numérique des équations du mouvement d'un satellite, lors du calcul d'orbite, nous allons exposer la méthode d'Encke. Elle est basée sur l'intégration de l'écart entre *l'orbite vraie* du satellite et une *orbite analytique moyenne* (voir Fig. 6.1). Les nouvelles variables du mouvement sont alors de petites quantités (nombres petits en valeur absolue), ce qui permet a priori d'accroître la précision relative des calculs. Cette orbite de référence, calculée de manière analytique par la méthode d'Aksnes (qui ne considère que certaines perturbations de l'orbite elliptique : $\frac{GM}{R}$, J_2 et J_4 ; Aksnes 1970) est une ellipse en précession.

On veut intégrer numériquement les équations du mouvement en éléments rectangulaires :

$$\begin{cases} \ddot{X} = F(X, \dot{X}, t, \gamma) \\ X(t_0) = X_0 \\ \dot{X}(t_0) = \dot{X}_0 \end{cases} \quad (6.15)$$

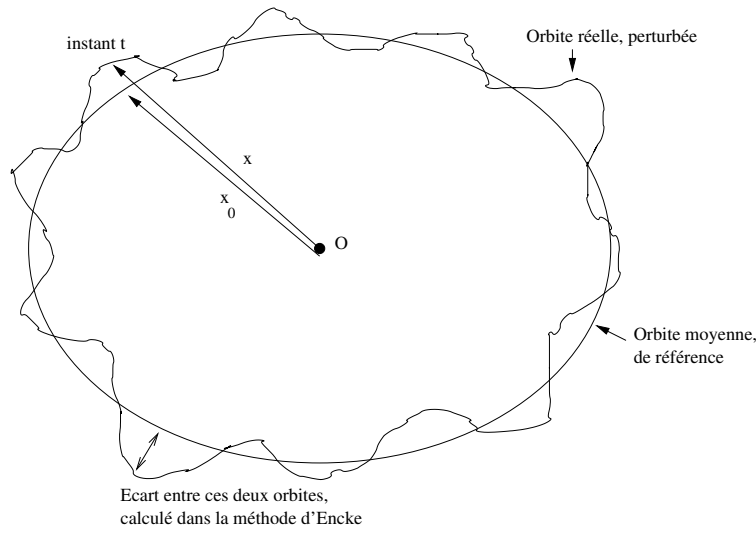


FIG. 6.1 – Bases de la méthode d’Encke pour l’intégration d’orbite d’un satellite artificiel : *orbite vraie* = orbite réelle (i.e. perturbée), *orbite moyenne* = orbite analytique calculée telle une ellipse en précession.

où $X = (x, y, z)$ est le vecteur position, $F = (F_1, F_2, F_3)$ dépend des forces perturbatrices de l’orbite du satellite, et γ est un vecteur de paramètres physiques.

6.4.1 Orbite de référence

Grâce à la méthode d’Aksnes (basée sur une théorie analytique du deuxième ordre pour le mouvement d’un satellite artificiel autour d’une planète aplatie dont le potentiel gravitationnel est simplifié ; Aksnes 1970) et au point initial de l’orbite vraie, on obtient le point initial de l’orbite analytique de référence. Il nous faut ensuite pouvoir l’exprimer à n’importe quel instant t .

Comment la propage-t-on ?

Comme nous traitons le problème d’un satellite artificiel orbitant autour de la Terre, sa trajectoire s’écarte peu d’une ellipse moyenne en précession, qui correspondra donc à l’orbite analytique de référence à calculer. On a alors à chaque instant t (tel que $t \neq t_0$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} dt = t - t_0 \\ \tilde{a} = \tilde{a}_0 \\ \tilde{e} = \tilde{e}_0 \\ \tilde{i} = \tilde{i}_0 \\ \tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_0 + \dot{\tilde{\Omega}}_0 dt \\ \tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 + \dot{\tilde{\omega}}_0 dt \\ \tilde{M} = \tilde{M}_0 + \bar{n} dt \end{array} \right. \quad (6.16)$$

où $\bar{n} = \dot{\tilde{M}}_0$ et $(\tilde{a}, \tilde{e}, \tilde{i}, \tilde{\Omega}, \tilde{\omega}, \tilde{M})$ sont les éléments képlériens de l’orbite analytique de référence à chaque instant t (voir Annexe F pour leur définition). On rappelle que les

éléments képlériens initiaux $(\tilde{a}_0, \tilde{e}_0, \tilde{i}_0, \tilde{\Omega}_0, \tilde{\omega}_0, \tilde{M}_0)$ et les dérivées séculaires $(\dot{\tilde{\Omega}}_0, \dot{\tilde{\omega}}_0, \bar{n})$ de cette orbite de référence sont calculés par la méthode d'Aksnes, issue de celle de Brouwer (Brouwer 1959), utilisant les éléments rectangulaires initiaux de l'*orbite vraie*.

Quelle en est l'accélération ?

Pour nous permettre d'exprimer l'accélération (ou les forces perturbatrices) d'un mobile sur cette orbite de référence, nous utilisons les équations qui suivent (Balmino 1994). Nous nous plaçons dans le repère mobile $(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{W})$, défini par le vecteur unitaire \vec{P} passant par le périhélie de l'ellipse en précession, ainsi que le vecteur unitaire \vec{Q} orthogonal à \vec{P} dans le plan de cette ellipse (voir Fig. 6.3). En restant dans le plan (\vec{P}, \vec{Q}) de l'orbite de référence, on peut écrire les équations de mécanique céleste suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{r} &= X\vec{P} + Y\vec{Q} \\ X &= r \cos \nu = a \cos(E - e) \\ Y &= r \sin \nu = a \sqrt{1 - e^2} \sin E \\ r &= a (\cos E - e) \\ E - e \sin E = M &= \bar{n} (t - t_0)\end{aligned}\tag{6.17}$$

où \vec{r} est le vecteur position du satellite, (X, Y) ses composantes dans le plan (\vec{P}, \vec{Q}) de l'orbite de référence et $(a, e, i, \omega, \Omega, M)$ ses éléments orbitaux. En dérivant une fois ce système, on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \dot{X}\vec{P} + \dot{Y}\vec{Q} + X\dot{\vec{P}} + Y\dot{\vec{Q}} \\ \dot{E} &= \frac{\bar{n}}{1 - e \cos E} = \frac{a}{r} \bar{n} \\ \dot{X} &= -a \sin E \dot{E} = -\frac{a^2}{r} \sin E \bar{n} \\ \dot{Y} &= a \sqrt{1 - e^2} \dot{E} \cos E \\ \dot{r} &= a e \sin E \dot{E}\end{aligned}\tag{6.18}$$

En dérivant une deuxième fois, afin d'obtenir les accélérations, on a :

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \ddot{X}\vec{P} + \ddot{Y}\vec{Q} + 2\dot{X}\dot{\vec{P}} + 2\dot{Y}\dot{\vec{Q}} + X\ddot{\vec{P}} + Y\ddot{\vec{Q}} \\ \ddot{E} &= -\frac{a}{r} e \sin E \dot{E}^2 \\ \ddot{X} &= -a \dot{E}^2 \cos \nu \\ \ddot{Y} &= -a \dot{E}^2 \sin \nu\end{aligned}\tag{6.19}$$

D'où finalement :

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}} &= -a \dot{E}^2 \cos \nu \vec{P} - a \dot{E}^2 \sin \nu \vec{Q} + \vec{\rho} \\
&= -\frac{a^3}{r^2} \bar{n}^2 \cos \nu \vec{P} - \frac{a^3}{r^2} \bar{n}^2 \sin \nu \vec{Q} + \vec{\rho} \\
&= -\frac{a^3}{r^2} \bar{n}^2 \left(\frac{X}{r} \vec{P} + \frac{Y}{r} \vec{Q} \right) + \vec{\rho} \\
&= -\frac{a^3}{r^3} \bar{n}^2 \left(X \vec{P} + Y \vec{Q} \right) + \vec{\rho}
\end{aligned} \tag{6.20}$$

On obtient l'accélération moyenne suivante :

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{a^3}{r^3} \bar{n}^2 \vec{r} + \vec{\rho} \tag{6.21}$$

si $\vec{\rho} = 2\dot{X}\vec{P} + 2\dot{Y}\vec{Q} + X\ddot{\vec{P}} + Y\ddot{\vec{Q}}$.

Nous pouvons maintenant exprimer les composantes des vecteurs $\vec{P}, \vec{Q}, \dot{\vec{P}}, \dot{\vec{Q}}, \ddot{\vec{P}}$ et $\ddot{\vec{Q}}$, en considérant le passage du repère orbital $(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{W})$ à un repère inertiel géocentrique. La matrice \mathcal{M} de changement de base correspondant est :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} P_x & Q_x & W_x \\ P_y & Q_y & W_y \\ P_z & Q_z & W_z \end{bmatrix} \tag{6.22}$$

avec, pour les composantes du vecteur \vec{P} :

$$\begin{cases} P_x = \cos \tilde{\Omega} \cos \tilde{\omega} - \sin \tilde{\Omega} \cos \tilde{i} \sin \tilde{\omega} \\ P_y = \sin \tilde{\Omega} \cos \tilde{\omega} + \cos \tilde{\Omega} \cos \tilde{i} \sin \tilde{\omega} \\ P_z = \sin \tilde{i} \sin \tilde{\omega} \end{cases} \tag{6.23}$$

et, pour les composantes du vecteur \vec{Q} :

$$\begin{cases} Q_x = -\cos \tilde{\Omega} \sin \tilde{\omega} - \sin \tilde{\Omega} \cos \tilde{i} \cos \tilde{\omega} \\ Q_y = -\sin \tilde{\Omega} \sin \tilde{\omega} + \cos \tilde{\Omega} \cos \tilde{i} \cos \tilde{\omega} \\ Q_z = \sin \tilde{i} \cos \tilde{\omega} \end{cases} \tag{6.24}$$

On peut alors obtenir les composantes du vecteur $\dot{\vec{P}}$:

$$\begin{cases} \dot{P}_x = -\dot{\tilde{\Omega}} P_y + \dot{\tilde{\omega}} Q_x \\ \dot{P}_y = \dot{\tilde{\Omega}} P_x + \dot{\tilde{\omega}} Q_y \\ \dot{P}_z = \dot{\tilde{\omega}} Q_z \end{cases} \tag{6.25}$$

ainsi que celles du vecteur $\dot{\vec{Q}}$:

$$\begin{cases} \dot{Q}_x = -\dot{\tilde{\Omega}} Q_y - \dot{\tilde{\omega}} P_x \\ \dot{Q}_y = \dot{\tilde{\Omega}} Q_x - \dot{\tilde{\omega}} P_y \\ \dot{Q}_z = -\dot{\tilde{\omega}} P_z \end{cases} \tag{6.26}$$

Et finalement, les composantes du vecteur $\ddot{\vec{P}}$ sont :

$$\begin{cases} \ddot{P}_x = -\left(\dot{\Omega}^2 + \dot{\omega}^2\right) P_x - 2 \dot{\Omega} \dot{\omega} Q_y \\ \ddot{P}_y = -\left(\dot{\Omega}^2 + \dot{\omega}^2\right) P_y + 2 \dot{\Omega} \dot{\omega} Q_x \\ \ddot{P}_z = -\dot{\omega}^2 P_z \end{cases} \quad (6.27)$$

ainsi que celles du vecteur $\ddot{\vec{Q}}$:

$$\begin{cases} \ddot{Q}_x = -\left(\dot{\Omega}^2 + \dot{\omega}^2\right) Q_x + 2 \dot{\Omega} \dot{\omega} P_y \\ \ddot{Q}_y = -\left(\dot{\Omega}^2 + \dot{\omega}^2\right) Q_y - 2 \dot{\Omega} \dot{\omega} P_x \\ \ddot{Q}_z = -\dot{\omega}^2 Q_z \end{cases} \quad (6.28)$$

6.4.2 Equations différentielles à résoudre avec la méthode d'Encke

En éléments elliptiques

Considérons tout d'abord les équations différentielles (appelées équations de Gauss-Lagrange) du mouvement du satellite sur l'*orbite vraie*, en éléments elliptiques :

$$\begin{cases} \dot{a} = f_a(a, e, i, \Omega, \omega, M, t, \gamma) \\ \dot{e} = f_e(a, e, i, \Omega, \omega, M, t, \gamma) \\ \dot{i} = f_i(a, e, i, \Omega, \omega, M, t, \gamma) \\ \dot{\Omega} = f_{\Omega}(a, e, i, \Omega, \omega, M, t, \gamma) \\ \dot{\omega} = f_{\omega}(a, e, i, \Omega, \omega, M, t, \gamma) \\ \dot{M} = f_M(a, e, i, \Omega, \omega, M, t, \gamma) \end{cases} \quad (6.29)$$

avec $(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0)$ donnés et γ un vecteur de paramètres physiques. On les appelle les équations de Gauss-Lagrange.

Dans le problème d'Encke, comme on considère la différence entre *orbite vraie* et *orbite moyenne*, on a le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\Delta a) = f_a \\ \frac{d}{dt}(\Delta e) = f_e \\ \frac{d}{dt}(\Delta i) = f_i \\ \frac{d}{dt}(\Delta \Omega) = f_{\Omega} - \dot{\Omega}_0 \\ \frac{d}{dt}(\Delta \omega) = f_{\omega} - \dot{\omega}_0 \\ \frac{d}{dt}(\Delta M) = f_M - \bar{n}_0 \end{cases} \quad (6.30)$$

avec $(\Delta a_0, \Delta e_0, \Delta i_0, \Delta \Omega_0, \Delta \omega_0, \Delta M_0)$ donnés et où pour chaque élément elliptique l , on a : $\Delta l = l - \tilde{l}$ (i.e. différences pour chaque élément orbital entre orbite vraie et orbite moyenne).

En éléments rectangulaires

Dans ce paragraphe, nous nous sommes appuyés sur les calculs effectués par G. Balmino (Balmino 1994). On réécrit ici le système (6.15) (ou encore Eq. (2.20)), dans lequel on met en évidence le terme principal du potentiel du corps central :

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \Delta \vec{F} \quad (6.31)$$

Or, pour le mouvement de référence, on a déjà vu que (voir Eq. (6.21)) :

$$\ddot{\vec{r}}_{ref} = -\bar{n}^2 \frac{a_{ref}^3}{r_{ref}^3} \vec{r}_{ref} + \vec{\rho}_{ref} \quad (6.32)$$

où $\vec{\rho}_{ref} = 2\dot{X}_{ref} \dot{\vec{P}} + 2\dot{Y}_{ref} \dot{\vec{Q}} + X_{ref} \ddot{\vec{P}} + Y_{ref} \ddot{\vec{Q}}$. Si on s'intéresse à la différence entre ces deux vecteurs, on obtient :

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{r}}_{ref} &= \Delta \ddot{\vec{r}} \\ &= -\mu \left[\frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\bar{n}^2}{\mu} \frac{a_{ref}^3}{r_{ref}^3} \vec{r}_{ref} \right] - \vec{\rho}_{ref} + \Delta \vec{F} \end{aligned} \quad (6.33)$$

D'après la loi des aires (i.e. 3^{ème} loi de Képler), on introduit le moyen mouvement de référence $n_{ref} = \sqrt{\mu/a_{ref}^3}$. On peut alors écrire :

$$\Delta \ddot{\vec{r}} = -\mu \left[\frac{\vec{r}}{r^3} - \left(\frac{\bar{n}}{n_{ref}} \right)^2 \frac{\vec{r}_{ref}}{r_{ref}^3} \right] - \vec{\rho}_{ref} + \Delta \vec{F} \quad (6.34)$$

Dans l'équation (6.34), les deux termes de la différence située entre crochets sont très proches, ce qui peut induire des problèmes numériques. On pose alors :

$$\left(\frac{\bar{n}}{n_{ref}} \right)^2 = 1 + \delta \quad (6.35)$$

$$\vec{\epsilon} = \Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_{ref} \quad (6.36)$$

Ceci nous permet de réécrire les termes entre crochets dans l'équation (6.34), de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\vec{r}}{r^3} - \left(\frac{\bar{n}}{n_{ref}} \right)^2 \frac{\vec{r}_{ref}}{r_{ref}^3} \right] &= \left[\frac{\vec{r}}{r^3} - (1 + \delta) \frac{\vec{r}_{ref}}{r_{ref}^3} \right] \\ &= \frac{1}{r_{ref}^3} \left[\vec{r} \frac{r_{ref}^3}{r^3} - (1 + \delta) \vec{r}_{ref} \right] \\ &= \frac{1}{r_{ref}^3} \left[\vec{r} \left(\frac{r_{ref}}{r} \right)^3 + \vec{\epsilon} - \vec{r} - \delta \vec{r}_{ref} \right] \\ &= \frac{1}{r_{ref}^3} \left[\vec{r} \left\{ \left(\frac{r_{ref}}{r} \right)^3 - 1 \right\} + \vec{\epsilon} - \delta \vec{r}_{ref} \right] \end{aligned} \quad (6.37)$$

On pose aussi :

$$\beta = \left(\frac{r_{ref}}{r} \right)^3 - 1 \quad (6.38)$$

$$\left(\frac{r_{ref}}{r} \right)^2 = 1 + \alpha \quad (6.39)$$

Par conséquent, d'après Eq. (6.36) et Eq. (6.39), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{r_{ref}^2 - r^2}{r^2} \\ &= \frac{(\vec{r}_{ref} - \vec{r}) \cdot (\vec{r}_{ref} + \vec{r})}{r^2} \\ &= -\frac{\vec{\epsilon} \cdot (\vec{r}_{ref} + \vec{r})}{r^2} \end{aligned} \quad (6.40)$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \beta &= (1 + \alpha)^{3/2} - 1 \\ &= \sqrt{\kappa} - 1 \quad , \text{ si } \kappa = (1 + \alpha)^3 \\ &= \frac{(\sqrt{\kappa} - 1)(\sqrt{\kappa} + 1)}{\sqrt{\kappa} + 1} \\ &= \frac{\kappa - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \\ &= \frac{(1 + \alpha)^3 - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \end{aligned} \quad (6.41)$$

D'après Eq. (6.41), on aboutit pour plus de facilités de calcul à :

$$\beta = \alpha \frac{\alpha^2 + 3\alpha + 3}{1 + (1 + \alpha)^{3/2}} \quad (6.42)$$

En résumé, si on revient à l'équation (6.34), l'équation différentielle du second ordre qu'il nous faudra résoudre est la suivante :

$$\Delta \ddot{\vec{r}} = -\mu \vec{D} - \vec{\rho}_{ref} + \Delta \vec{F} \quad (6.43)$$

où \vec{D} s'écrit, d'après (i) Eq. (6.37) et Eq. (6.38), d'une part puis (ii) Eq. (6.36), d'autre part, comme :

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \frac{1}{r_{ref}^3} [\vec{r} \beta + \vec{\epsilon} - \delta \vec{r}_{ref}] \\ &= \frac{1}{r_{ref}^3} [\beta (\Delta \vec{r} + \vec{r}_{ref}) + \Delta \vec{r} - \delta \vec{r}_{ref}] \end{aligned} \quad (6.44)$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \Delta \vec{r}_0 = \vec{r}_0 - \vec{r}_{ref}(t_0) \\ \Delta \dot{\vec{r}}_0 = \dot{\vec{r}}_0 - \dot{\vec{r}}_{ref}(t_0) \end{cases} \quad (6.45)$$

Pour plus de détails pratiques, on pourra se référer à l'annexe I.

6.5 Comparaison des deux méthodes et résultats

Nous effectuons des tests des méthodes d'intégration numérique de Cowell et d'Encke, dans le cadre du calcul de l'orbite du satellite GRACE (d'altitude ~ 350 km). Le but est d'estimer les erreurs numériques induites par ces intégrateurs :

- Nous nous basons tout d'abord sur une position initiale du satellite GRACE à l'instant t_0 (appelée aussi bulletin initial B_0 ; i.e. ensemble des éléments orbitaux du satellite à l'instant t_0). Nous extrapolons alors l'orbite sur deux jours. La position finale obtenue à l'instant T (i.e. deux jours après) est notée B' . Nous nommerons par la suite cette extrapolation d'orbite : *extrapolation aller*.

- Nous effectuons ensuite une autre intégration de l'orbite du satellite GRACE, sous les mêmes conditions orbitales (i.e. mêmes perturbations extérieures appliquées), depuis l'instant T avec une position initiale B' pour le satellite. Nous extrapolons l'orbite sur deux jours, mais à rebours (i.e. pas d'intégration négatif). Le bulletin obtenu au final (à l'instant t_0) est noté B'' . Nous nommerons par la suite cette extrapolation d'orbite : *extrapolation retour*.

En théorie, dans le cas où il n'y aurait aucune erreur numérique, les bulletins B_0 et B'' devraient être identiques. Nous considérerons donc leur différence comme un indicateur des erreurs numériques dues à l'intégrateur (voir Fig. 6.2). On s'intéresse surtout ici à l'ordre de grandeur de cette erreur, afin de conserver la précision a priori des mesures GRACE : on essaie donc d'atteindre le micromètre au niveau du positionnement théorique du satellite.

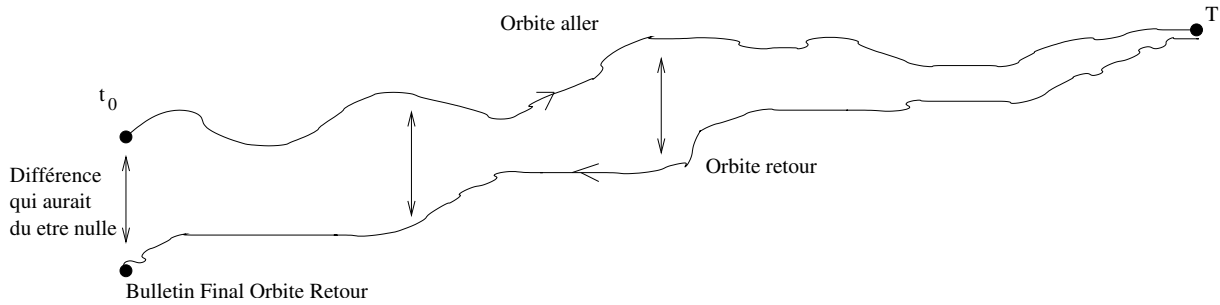


FIG. 6.2 – Propagation des erreurs lors de l'extrapolation d'orbite retour, par rapport à l'extrapolation d'orbite aller : éloignement des deux orbites.

Eléments d'orbite initiaux

On considère un satellite fictif initialement en position suivante (i.e. dans les conditions orbitales de GRACE) :

$$\begin{aligned}
 a &= 6728000 \text{ m} \\
 e &= 0.004 \\
 i &= 89.5 \text{ deg} \\
 \Omega &= 0 \text{ deg} \\
 \omega &= 0 \text{ deg} \\
 M &= 0 \text{ deg}
 \end{aligned} \tag{6.46}$$

Pour des raisons de précision numérique, il vaut cependant mieux donner les éléments rectangulaires initiaux. Rappelons la méthode de passage des éléments képlériens (voir Fig. 6.3) aux éléments rectangulaires. Passons tout d'abord des éléments képlériens aux éléments rectangulaires relatifs au repère orbital (P, Q, W) . On a alors les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
X &= r \cos \nu = r = a(1 - e \cos E) = a(1 - e) = a(1 - 0.004) = 6701088 \text{ m} \\
Y &= r \sin \nu = 0 \text{ m} \\
Z &= 0 \text{ m} \\
\dot{X} &= -n a / \sqrt{1 - e^2} \sin \nu = 0 \text{ m s}^{-2} \\
\dot{Y} &= \dot{r} \sin \nu + r \dot{\nu} \cos \nu = r \dot{\nu} = \frac{H}{r}, \text{ d'après la loi des Aires} \\
&= H / p (1 + e \cos \nu) = H / p (1 + e) = \sqrt{\mu a (1 - e^2)} / (a (1 - e^2)) (1 + e) \\
&= \sqrt{\mu / a} \sqrt{(1 + e) / (1 - e)} = 7730.50214 \text{ m s}^{-2} \\
\dot{Z} &= 0 \text{ m s}^{-2}
\end{aligned} \tag{6.47}$$

Ensuite, passons du repère orbital (P, Q, W) au repère terrestre. On utilise la matrice de passage \mathcal{M} , basée sur les trois angles de rotation suivants : ω , i et Ω . Par conséquent, elle est ici définie par :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \tag{6.48}$$

De plus, on a :

$$\begin{bmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \\ z & \dot{z} \end{bmatrix} = \mathcal{M} \begin{bmatrix} X & \dot{X} \\ Y & \dot{Y} \\ Z & \dot{Z} \end{bmatrix} \tag{6.49}$$

Finalement, les éléments rectangulaires initiaux du satellite fictif considéré sont :

$$\begin{aligned}
x &= X = 6701088 \text{ m} \\
y &= \cos i Y - \sin i Z = 0 \text{ m} \\
z &= \sin i Y + \cos i Z = 0 \text{ m} \\
\dot{x} &= \dot{X} = 0 \text{ m s}^{-2} \\
\dot{y} &= \cos i \dot{Y} - \sin i \dot{Z} = 67.46050135 \text{ m s}^{-2} \\
\dot{z} &= \sin i \dot{Y} + \cos i \dot{Z} = 7730.207786 \text{ m s}^{-2}
\end{aligned} \tag{6.50}$$

Forces considérées dans nos tests

Les forces extérieures agissant sur ce satellite fictif, et que nous avons utilisées dans le logiciel GINS d'orbitographie, sont les suivantes :

- Le champ de gravité (GRIM5) jusqu'au degré 120,
- L'attraction gravitationnelle du Soleil, de la Lune et de 6 planètes,
- Les marées terrestres calculées avec le modèle IERS96,
- Les marées océaniques calculées à partir d'un modèle avec admittance,
- La variation de pression atmosphérique calculée à partir de données ECMWF et d'un modèle de réponse statique de l'océan (la pression sur les océans est ignorée),

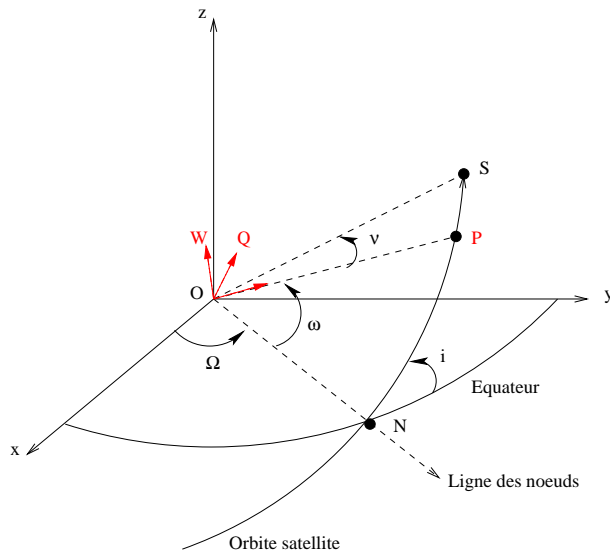


FIG. 6.3 – Éléments képlériens de l'orbite.

- L'émission thermique du satellite.

Nous avons omis les forces de surface (comme le frottement atmosphérique, la pression de radiation solaire, les passages d'éclipses), parce qu'elles sont mesurées directement par les accéléromètres embarqués sur chacun des deux satellites GRACE. Nous les considérons donc dans nos tests comme bien prises en compte grâce à ces mesures accélérométriques.

Tests numériques effectués pour la méthode de Cowell

Nous testons sur deux jours d'extrapolation d'orbite (i) le pas d'intégration numérique ($\Delta t = 60$ s, 30 s, 15 s, 10 s, 5 s, ou 1 s), puis (ii) l'ordre de la méthode d'intégration choisi (ordres 4, 6, 8, 10, ou 12). Nous effectuons nos deux intégrations numériques décrites plus haut et nous nous intéressons à la différence entre le bulletin B_0 (position du satellite à l'instant t_0 initial) et B'' (position du satellite à la fin de la deuxième extrapolation d'orbite, à rebours).

Nous nous intéressons plus particulièrement à (sachant que (R, T, N) est le repère correspondant aux positions radiale, tangentielle, et normale) :

- (i) La déviation standard de la différence de position (respectivement de vitesse) du satellite, dans la direction tangentielle (respectivement dans le repère $(X, Y, Z) = (T, -N, -R)$ lié au satellite), entre extrapolations aller et retour (voir Table 6.1 et Table 6.3).
- (ii) La valeur maximale de cette même différence de position tangentielle (respectivement vitesse dans le repère (X, Y, Z)) entre extrapolations aller et retour (voir Table 6.2 et Table 6.4).

Nous nous focalisons sur la position tangentielle du satellite par rapport à son orbite car c'est en général dans cette direction que les erreurs s'accumulent. Précisons que la déviation standard correspond à la racine carrée de la variance de nos données et nous informe sur leur dispersion. Nous pouvons tracer les résultats obtenus (voir Fig. 6.4) afin

de montrer l'évolution de cette déviation standard, en fonction du pas et de l'ordre de l'intégrateur de Cowell.

Nous pouvons constater que les erreurs numériques minimales engendrées par l'intégration numérique (lors du calcul d'orbite) correspondent à l'utilisation (i) d'un pas d'intégration de 10 s, et (ii) d'un ordre 8 d'intégration (ou bien aussi un pas d'intégration de 1 s et un ordre 10 d'intégration) (voir les termes en gras dans la Table 6.1 et Table 6.2, ainsi que la Table 6.3 et la Table 6.4).

Cela montre qu'il serait judicieux d'utiliser l'une de ces deux configurations d'intégration afin d'intégrer les orbites satellitales de GRACE. Nous pouvons constater que les erreurs numériques ainsi engendrées sont comprises entre le micromètre et la dizaine de microns. La méthode de Cowell est donc tout à fait satisfaisante (relativement à la précision des mesures des satellites GRACE).

TAB. 6.1 – Déviation standard (en mm) de la différence de position tangentielle lors du test aller-retour d'extrapolation d'orbite : différents pas d'intégration et différents ordres de la méthode de Cowell sont testés.

Pas	Ordre 4	Ordre 6	Ordre 8	Ordre 10	Ordre 12	Ordre 14
1 s		0.009	0.005	0.001	0.006	
5 s	0.056	0.006	0.007	0.005	0.007	0.006
10 s	1.286	0.006	0.002	0.007	0.010	0.006
15 s	8.713	0.026	0.023	0.015	0.015	0.330
30 s			1.534			
60 s			50.022			

TAB. 6.2 – Valeur maximale de la différence de position tangentielle (en mm), lors du test aller-retour d'extrapolation d'orbite : différents pas d'intégration et différents ordres de la méthode de Cowell sont testés.

Pas	Ordre 4	Ordre 6	Ordre 8	Ordre 10	Ordre 12	Ordre 14
1 s		0.031	0.016	0.005	0.020	
5 s	0.207	0.021	0.026	0.017	0.021	0.020
10 s	4.882	0.020	0.008	0.026	0.035	0.019
15 s	33.307	-0.087	0.083	0.052	0.052	1.158
30 s			-5.314			
60 s			169.721			

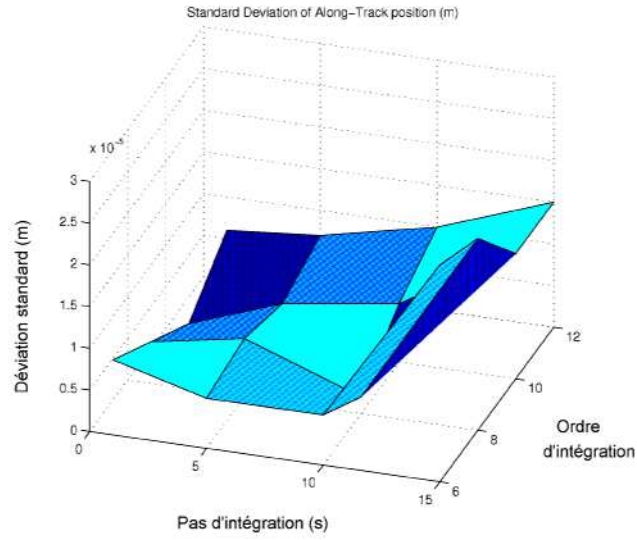


FIG. 6.4 – Déviation standard de la différence de position tangentielle (en m) entre extrapolation aller et extrapolation retour : évolution suivant le pas et l'ordre d'intégration.

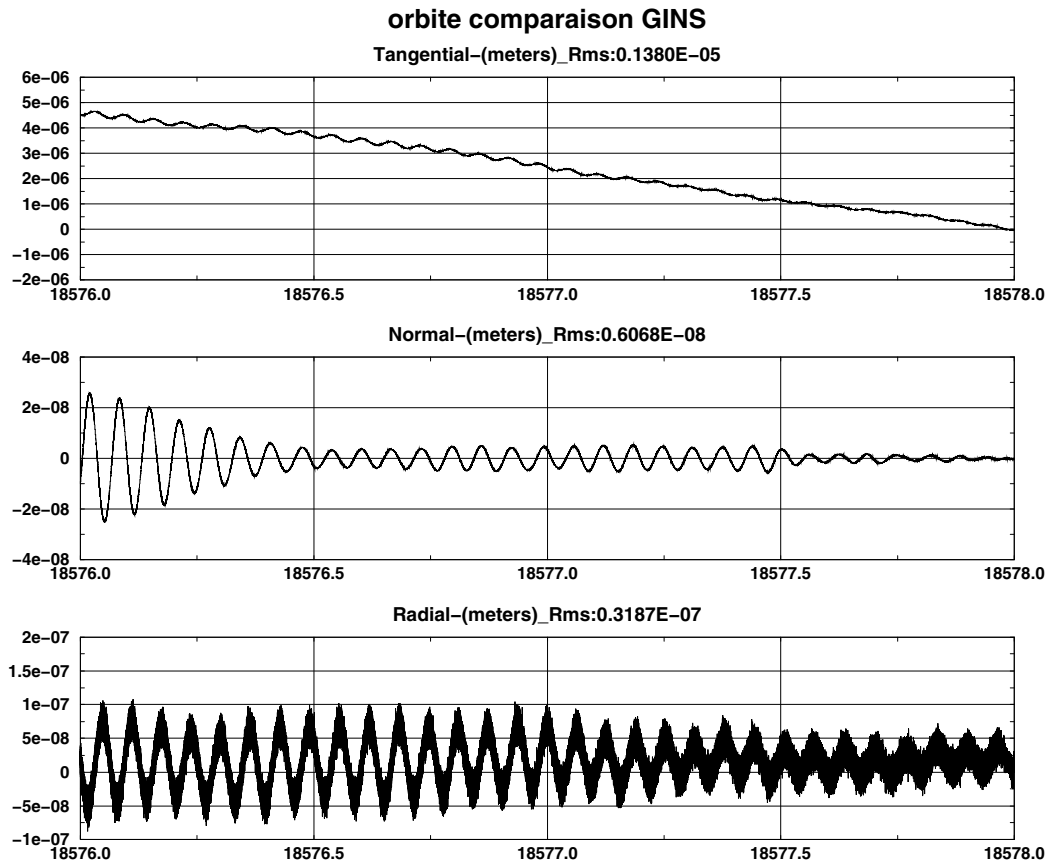


FIG. 6.5 – Allure de la différence de position du satellite entre extrapolation aller et extrapolation retour, avec la méthode de Cowell (pour un pas d'intégration de 1s et un ordre 10 d'intégration).

TAB. 6.3 – Déviation standard de la différence de vitesse en X (en mm s^{-1}) entre extrapolation aller et extrapolation retour : différents pas d'intégration et différents ordres de la méthode de Cowell sont testés.

Pas	Ordre 4	Ordre 6	Ordre 8	Ordre 10	Ordre 12	Ordre 14
1 s		0.014	0.007	0.002	0.009	
5 s	0.078	0.008	0.012	0.008	0.010	0.010
10 s	1.686	0.008	0.004	0.012	0.016	0.010
15 s	11.045	0.030	0.031	0.019	0.021	0.534
30 s			1.851			
60 s			63.310			

TAB. 6.4 – Maximum de la différence de vitesse en X (en mm s^{-1}) entre extrapolation aller et extrapolation retour : différents pas d'intégration et différents ordres de la méthode de Cowell sont testés.

Pas	Ordre 4	Ordre 6	Ordre 8	Ordre 10	Ordre 12	Ordre 14
1 s		-0.036	0.018	0.005	0.022	
5 s	-0.224	-0.024	0.029	-0.020	0.024	0.023
10 s	-5.187	-0.023	-0.010	-0.030	0.039	0.021
15 s	-35.077	0.100	-0.095	-0.060	-0.060	-1.333
30 s			6.119			
60 s			195.868			

Si nous nous intéressons à l'allure des courbes de différence entre extrapolation aller et extrapolation retour pour cette méthode de Cowell, la Figure 6.5 montre cette différence en R (radial), T (tangential) et N (normal), dans le repère céleste. Nous pouvons constater comme prévu que la plus grande différence de position tangentielle se situe à la date de départ. En effet, lors de l'extrapolation retour, cette même date correspond au bulletin final, qui souffre de l'accumulation des erreurs numériques de l'intégrateur (voir Fig. 6.2).

Comparons maintenant les méthodes de Cowell (testée précédemment) et d'Encke. En théorie, cette dernière devrait donner de meilleurs résultats, car elle intègre de plus petites quantités en valeur absolue (différences entre éléments orbitaux de l'orbite vraie et de l'orbite analytique moyenne). Nous avons déjà noté que la méthode de Cowell donnait déjà de bons résultats, et nous allons vérifier si la méthode d'Encke apporte des améliorations.

Comparaison entre les méthodes de Cowell et d'Encke

Sur la base des tests effectués précédemment pour la méthode d'intégration numérique de Cowell, nous pouvons procéder de même pour la méthode d'Encke. Cependant, pour la méthode d'Encke, nous avons effectué ces traitements en éléments rectangulaires puis

en éléments orbitaux (notés Rect. puis Orb. respectivement dans la Table 6.5). Comparons alors les résultats relatifs à la différence de position et de vitesse d'orbite entre extrapolation aller et extrapolation retour, pour les méthodes de Cowell et d'Encke.

Nous avons effectué les intégrations avec un pas de 10 s, car nous avons pu constater qu'il donnait de meilleurs résultats que les autres lors d'une intégration de Cowell (nous aurions pu également présenter les comparaisons pour un pas d'intégration de 1 s, cependant dans l'optique d'un traitement routinier de ces données, ceci paraît trop court). Nous nous sommes également concentrés sur les ordres d'intégration 8 et 10 qui donnaient de meilleurs résultats (tout comme pour la méthode d'Encke). Nous avons évalué pour les deux méthodes la différence de (i) position tangentielle, et (ii) vitesse (composante X), entre une extrapolation aller et l'extrapolation retour correspondante. Nous nous sommes focalisé sur la déviation standard ainsi que sur la valeur maximale de ces deux quantités.

Référons nous à la Table 6.5 afin de commenter les résultats obtenus. De manière générale, nous pouvons constater que la méthode d'Encke ne donne pas de meilleurs résultats (du point de vue des erreurs numériques créées par l'intégration numérique) que la méthode de Cowell (voir termes en gras dans la Table 6.5). Même lorsque l'on intègre en éléments orbitaux les deux méthodes sont au mieux équivalentes. Ceci peut être imputé en partie à la précision numérique de la machine utilisée lors de ces calculs, qui n'était pas suffisamment précise pour rendre compte d'un éventuel apport de la méthode d'Encke.

TAB. 6.5 – Comparaison entre méthode de Cowell et d'Encke : intégration pour $\Delta t = 10$ s. On s'intéresse à la différence de position et vitesse d'orbite entre extrapolation aller et extrapolation retour (Encke (Rect) indique que l'on a intégré en éléments rectangulaires, alors que Encke (Orb) indique que l'on a intégré en éléments orbitaux, pour la méthode d'Encke).

		Ordre 8	Ordre 10
Déviation standard de la différence de positions tangentielles (en mm)	Encke (Rect)	0.004	0.014
	Encke (Orb)	0.005	0.003
	Cowell	0.002	0.007
Valeur maximale de la différence de positions tangentielles (en mm)	Encke (Rect)	-0.021	-0.057
	Encke (Orb)	-0.020	-0.010
	Cowell	0.008	0.026
Déviation standard de la différence de vitesses (composante X) (en mm s ⁻¹)	Encke (Rect)	0.008	0.026
	Encke (Orb)	0.010	0.004
	Cowell	0.004	0.012
Valeur maximale de la différence de vitesses (composante X) (en mm s ⁻¹)	Encke (Rect)	0.024	0.066
	Encke (Orb)	0.023	0.011
	Cowell	-0.010	-0.030

6.6 Conclusion

La méthode la plus utilisée pour l'intégration numérique des équations du mouvement d'un satellite (lors du calcul d'orbites) est en général la méthode de Cowell, méthode dite de prédiction-correction (ou méthode "multipas"). Nous avons testé sa précision numérique, afin d'obtenir les erreurs numériques les plus petites possibles et de l'ordre du micromètre (ou plus petites). Nous l'avons comparée à la méthode d'Encke, basée sur l'intégration à partir d'une orbite analytique moyenne (ellipse en précession), dans l'idée d'intégrer les deux satellites co-orbitaux GRACE en relatif à partir d'une même orbite analytique moyenne.

En théorie, la méthode d'Encke était meilleure que celle de Cowell. Cependant, d'après les résultats des tests effectués, nous n'avons pas abouti à cette conclusion, étant donné qu'elle ne permet pas de réduire les erreurs numériques engendrées par l'intégration numérique dans le calcul d'orbite. Une telle méthode méritera d'être testée sur une machine plus précise encore du point de vue numérique que celle utilisée dans cette étude.

Nous avons pu constater de plus que la méthode de Cowell donne des résultats tout à fait satisfaisants. En effet, suivant le pas et l'ordre d'intégration choisis, elle permet de réduire les erreurs numériques entre le micromètre et la dizaine de microns sur deux jours d'intégration d'orbite, autrement dit elle donne des précisions apparemment inférieures au bruit de mesure de GRACE. Ces tests ont permis d'apporter des éléments d'information très utiles sur les performances de ces deux méthodes, et étaient nécessaires dans le cadre de l'utilisation des données du satellite GRACE.

Chapitre 7

Nouvelle détermination du champ de gravité variable à partir d'observations des satellites Lageos I et II

7.1 Introduction

Le GRGS (Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale, France) dispose d'une série temporelle de variations de \bar{C}_{20} autour d'une partie constante (Biancale et al. 2002), allant de 1985 à 2002 (voir Fig. 7.1). Elle est issue de l'étude du positionnement de plusieurs satellites grâce au logiciel GINS (GRIM5, voir Biancale et al. 2000 et Gruber et al. 2000), notamment les satellites dont l'orbitographie est mesurée par télémétrie laser, tels que Lageos I, Lageos II, Starlette ou Stella (voir Fig. 7.2 et Fig. 7.3). Une telle combinaison permet de décorréler les coefficients harmoniques du champ à déterminer, comme on l'a vu dans la partie 2.4.1.

Cette série a été obtenue en introduisant dans le traitement des modèles a priori des $\Delta\bar{C}_{20}$ dûs aux (i) variations de pression atmosphérique (Chao & Au 1991 ; Gegout & Cazenave 1993b), et aux (ii) effets de marées solides ainsi qu'océaniques (IERS Conventions 1996). Ces variations temporelles de \bar{C}_{20} provenant des effets atmosphériques sont dues à l'attraction gravitationnelle exercée par l'atmosphère ainsi qu'à son effet de surcharge (l'hypothèse de baromètre inverse au-dessus des océans a été supposée) (Gegout 1995).

Cette série souffre cependant de quelques lacunes. En effet, lorsque l'on étudie son spectre de Fourier (voir Fig. 7.4), on distingue un phénomène périodique à la période de $T \simeq 36$ jours (i.e. 10 fois par an environ). Ce terme nous est apparu suspect car il ne se rapportait à aucun phénomène connu à cette période. C'est pourquoi nous avons tracé la transformée en ondelettes de cette série (Lambert 2003), afin de montrer l'amplitude de chacun des phénomènes périodiques présents, tout du long de notre intervalle d'étude (voir Fig. 7.5). Ainsi, nous avons pu constater que ce phénomène ne se produisait qu'entre 1989 et 1993, période durant laquelle seul Lageos I a été pris en compte dans le traitement d'orbite et la détermination du champ de gravité (voir Fig. 7.2). Par conséquent, ce phénomène peut très bien ne pas être significatif et n'être en fait qu'un

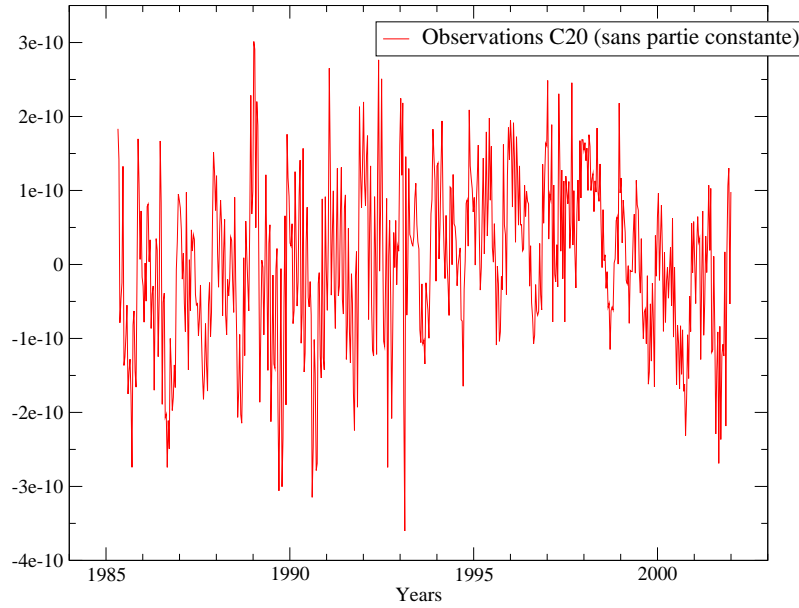


FIG. 7.1 – Série des variations temporelles de \bar{C}_{20} , issue de GRIM5.

artefact du traitement. Par la suite cela se confirmera lorsque l'on étudiera les séries issues de la redétermination des équations normales des satellites artificiels Lageos I et Lageos II (§7.3).

Notons que ce défaut n'a pas eu de conséquences sur l'étude décrite au Chapitre 11 (Bourda & Capitaine 2004), dans laquelle elle est utilisée, car nous l'avons filtrée de manière à ce que les périodes inférieures à 180 jours soient éliminées. Nous ne nous sommes ainsi intéressés qu'aux phénomènes annuels, semi-annuels et à plus long terme.

Nous allons tout d'abord rappeler les modèles a priori de variations temporelles des coefficients de Stokes de degré 2, utilisés dans le logiciel d'orbite GINS du GRGS/CNES. Nous allons ensuite présenter la redétermination du champ de gravité basée sur les équations normales de Lageos I et Lageos II, dans le but d'obtenir de nouvelles séries plus homogènes des variations temporelles des coefficients du géopotentiel (de degré 2). Nous montrerons comment nous avons contraint la détermination de ces coefficients de Stokes de degré 2, par des données de variations temporelles de certains coefficients du champ issues du satellite GRACE. Nous présenterons les résultats obtenus et comparerons les différentes séries à notre disposition.

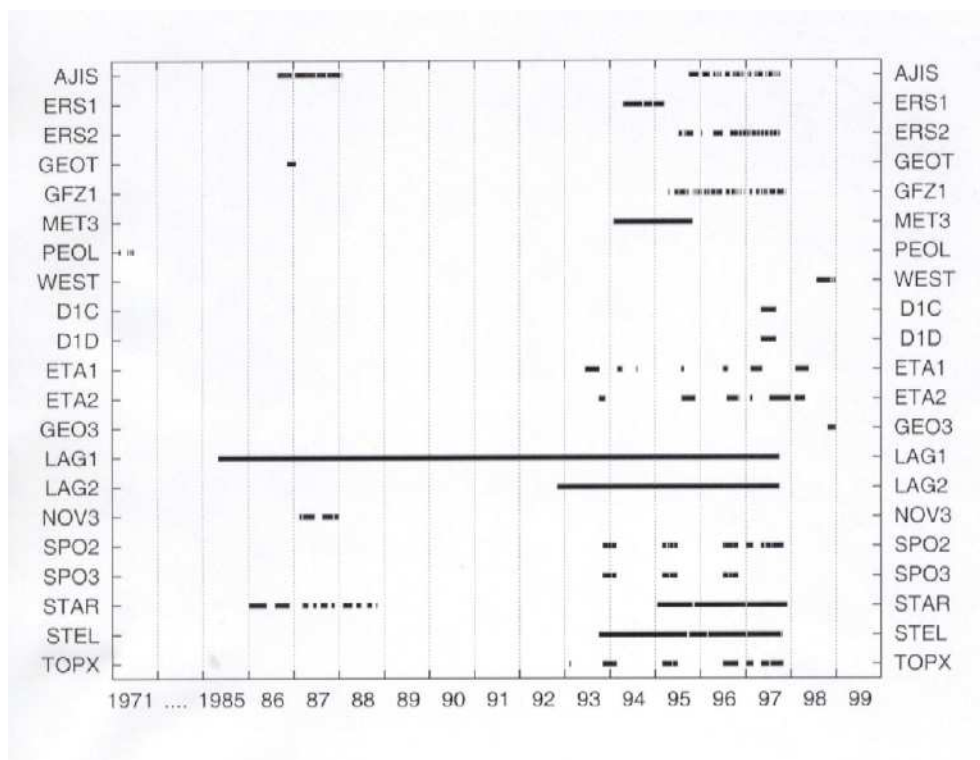


FIG. 7.2 – Liste des satellites utilisés dans le modèle de champ de gravité GRIM5 de 1985 à 1999 (source GRGS/CNES).

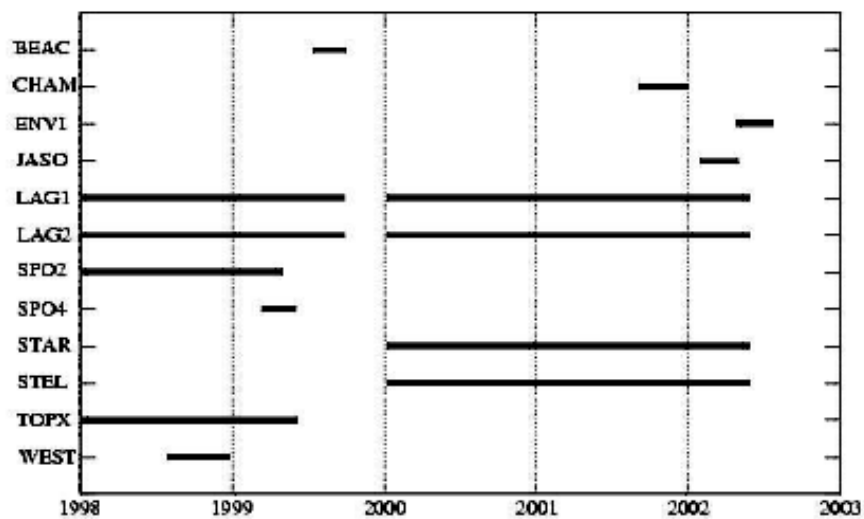


FIG. 7.3 – Liste des satellites utilisés dans le modèle de champ de gravité GRIM5 de 1998 à 2002 (source GRGS/CNES).

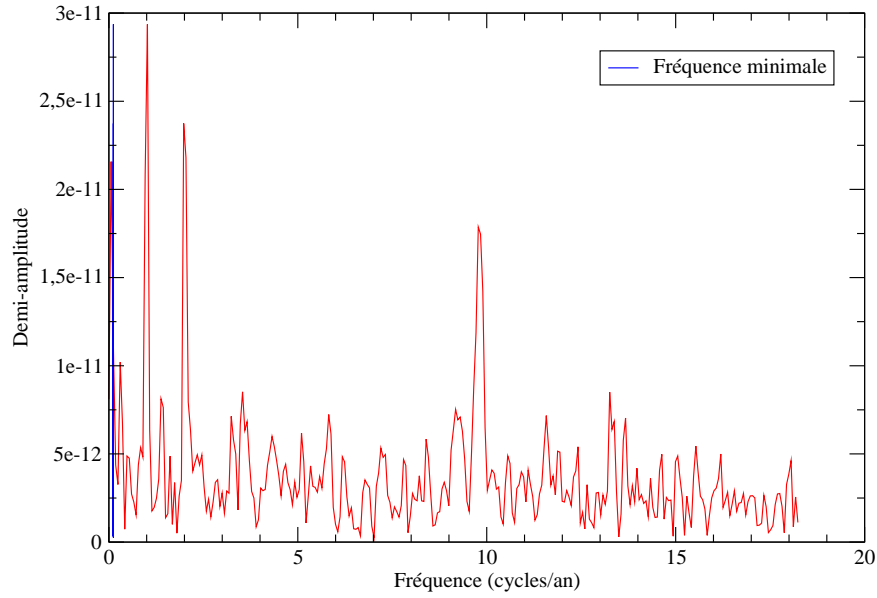


FIG. 7.4 – Spectre de Fourier de la série de variations temporelles de \bar{C}_{20} du GRGS (GRIM5) : les périodes mises en évidence sont annuelle, semi-annuelle et $\simeq 36$ jours.

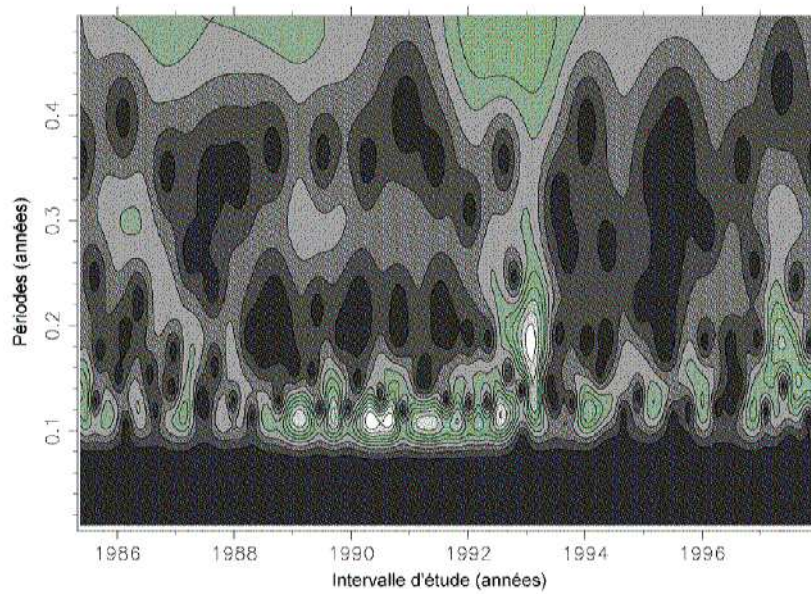


FIG. 7.5 – Analyse en ondelettes de la série de variations temporelles de \bar{C}_{20} du GRGS (GRIM5) : la période mise en évidence ici est $\simeq 36$ jours.

7.2 Modèles a priori pour les variations des coefficients de Stokes de degré 2

Les variations des coefficients de Stokes \bar{C}_{20} , \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} , \bar{C}_{22} et \bar{S}_{22} du potentiel gravitationnel terrestre sont dues à des redistributions de masses (de l'équateur vers les pôles et inversement, en ce qui concerne \bar{C}_{20}). Différents phénomènes entrent en jeu, telles les redistributions de masses atmosphériques, ou bien celles dues aux marées terrestres ou océaniques. Ces trois effets sont modélisés dans le logiciel GINS de restitution et d'intégration d'orbite (CNES/GRGS). Cependant, les autres causes éventuelles, comme par exemple les effets hydrologiques, ne le sont pas.

Nous nous attachons ici à montrer comment les contributions de l'atmosphère et des marées sont modélisées pour les variations des coefficients de Stokes \bar{C}_{20} , \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} , \bar{C}_{22} et \bar{S}_{22} .

7.2.1 Variations dues à la pression atmosphérique

Les variations de pression atmosphérique, induites par des redistributions de masses dans l'atmosphère, ont des effets gravitationnels et contribuent par conséquent aux variations du potentiel terrestre de gravité. Nous allons rappeler cette contribution atmosphérique à la partie variable de \bar{C}_{20} , \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} , \bar{C}_{22} et \bar{S}_{22} , coefficients harmoniques sphériques d'ordre 2 décrivant le géopotential.

Tout d'abord, rappelons la définition du potentiel atmosphérique U_{atm} de simple couche au point (r, ϕ, λ) à l'instant t :

$$U_{atm}(r, \phi, \lambda, t) = 4 \pi G R_e \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1 + k'_l}{2l + 1} \left(\frac{R_e}{r} \right)^{l+1} \sum_{m=0}^l q_{lm}(\phi, \lambda, t) \quad (7.1)$$

où $R_e = 6378136.46$ m est le rayon équatorial terrestre, $G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ est la constante gravitationnelle, et k'_l est un nombre de Love (Farrell 1972), avec en particulier $k'_2 = -0.305449$. La charge q de pression atmosphérique s'écrit en fonction des variations de pression ΔP (données en Pascals) de la manière suivante :

$$q(\phi, \lambda, t) = \frac{\Delta P(\phi, \lambda, t)}{g} \quad (7.2)$$

où $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$. Et on peut développer cette variation de pression atmosphérique en harmoniques sphériques au point (ϕ, λ) à l'instant t :

$$\Delta P(\phi, \lambda, t) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \left(\Delta \bar{C}_{lm|atm}(t) \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{lm|atm}(t) \sin m\lambda \right) \bar{P}_{lm}(\sin \phi) \quad (7.3)$$

où les $\Delta \bar{C}_{lm|atm}$ et $\Delta \bar{S}_{lm|atm}$ doivent être exprimés en Pascals (on notera que $1 \text{ mbar} = 100 \text{ Pa}$ et que $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N m}^{-2} = 1 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$). Ces coefficients proviennent des données ECMWF de pression atmosphérique à chaque noeud de la grille modélisant l'atmosphère telle une couche.

D'autre part, le potentiel gravitationnel terrestre au point (r, ϕ, λ) et à l'instant t s'écrit de la manière suivante (voir §2.2) :

$$U_{\oplus}(r, \phi, \lambda, t) = \frac{GM}{r} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R_e}{r} \right)^l \bar{P}_{lm}(\sin \phi) (\bar{C}_{lm}(t) \cos m\lambda + \bar{S}_{lm}(t) \sin m\lambda) \quad (7.4)$$

où M est la masse de la Terre, calculée à partir de $GM = 0.3986004415 \cdot 10^{15} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$.

En écrivant l'égalité des deux expressions (7.1) et (7.4), puis en identifiant membre à membre, on peut déterminer la partie variable du potentiel gravitationnel terrestre limité à l'ordre 2 et provenant des variations de pression atmosphérique :

$$\begin{aligned} & \frac{G}{r} \frac{M}{r} \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 \bar{P}_{2m}(\sin \phi) (\Delta \bar{C}_{2m}(t) \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{2m}(t) \sin m\lambda) \\ &= 4\pi G R_e \frac{1+k'_2}{5g} \left(\frac{R_e}{r} \right)^3 (\Delta \bar{C}_{2m|atm}(t) \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{2m|atm}(t) \sin m\lambda) \bar{P}_{2m}(\sin \phi) \end{aligned} \quad (7.5)$$

pour $m = 0, 1$ ou 2 . Par conséquent, on obtient :

$$\Delta \bar{C}_{2m}(t) = \frac{4\pi R_e^2 (1+k'_2)}{5Mg} \Delta \bar{C}_{2m|atm}(t) \quad (7.6)$$

$$\Delta \bar{S}_{2m}(t) = \frac{4\pi R_e^2 (1+k'_2)}{5Mg} \Delta \bar{S}_{2m|atm}(t) \quad (7.7)$$

pour tout $m = 0, 1$ ou 2 et où $\Delta \bar{C}_{2m|atm}$ et $\Delta \bar{S}_{2m|atm}$ proviennent de la décomposition en harmoniques sphériques des grilles de pression atmosphérique fournies par ECMWF (Chao & Au 1991 ; Gegout & Cazenave 1993b), toutes les 6 h, sur les continents (en unités SI, i.e. en Pascals). Nous avons tracé ces variations temporelles du \bar{C}_{20} terrestre dues aux effets de pression atmosphérique (voir Fig. 7.6), ainsi que celles des autres coefficients de degré 2 du potentiel gravitationnel terrestre (voir Figs. 7.11 à 7.14). Notons qu'en pratique, lors de l'exécution du programme GINS, ces $\Delta \bar{C}_{2m|atm}(t)$ et $\Delta \bar{S}_{2m|atm}(t)$ fournis en Pa sous forme normalisée sont lus dans des fichiers (voir Table 7.1).

SPHERICAL HARMONICS ANALYSIS of the ATMOSPHERIC
PRESSURE VARIATION over CONTINENTS : 134 93 1 1 0
50 50 48988.00 66.10

1	0	-17.71	2	0	24.05	3	0	-143.78	4	0	-21.45	5	0	-95.48
6	0	14.43	7	0	-53.82	8	0	25.71	9	0	1.43	10	0	66.05

TAB. 7.1 – Exemple de fichier lu, correspondant à une certaine date $t = 48988.00$ mjd : Valeur des coefficients harmoniques sphériques zonaux normalisés (du degré 1 au degré 10), correspondant à des variations de pression atmosphérique ; unités en Pascals.

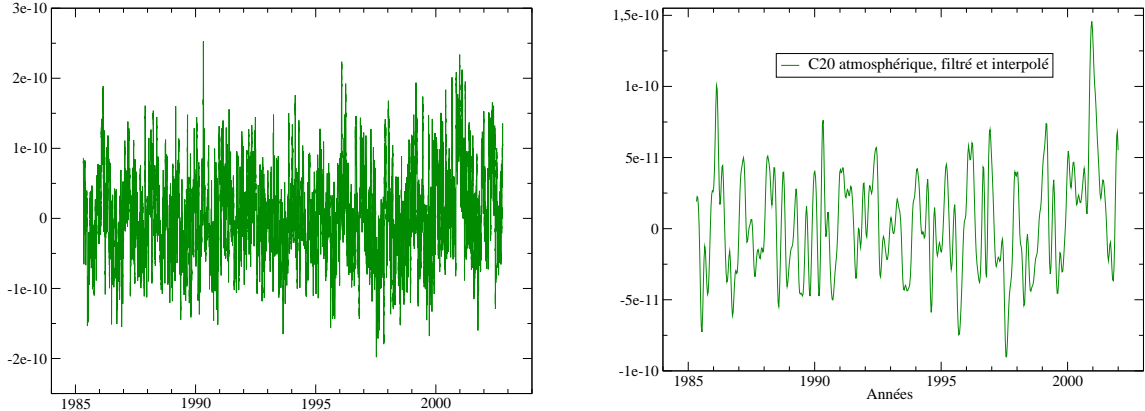


FIG. 7.6 – $\Delta\bar{C}_{20}$ atmosphérique normalisé (Gauche : données brutes - Eq. (7.6) ; Droite : données filtrées, où les signaux de haute fréquence ont été enlevés) : partie atmosphérique modélisée du $\Delta\bar{C}_{20}$, obtenue avec les données ECMWF de pression atmosphérique.

7.2.2 Variations dues à la Marée solide

Les Marées terrestres solides sont dues à l'effet gravitationnel de la Lune et du Soleil sur la Terre. Cette force admet un potentiel développable en harmoniques sphériques de la manière suivante (limité ici au degré 2) (IERS Conventions 1996) :

$$U_2(r, \phi, \lambda) = G M \frac{R_e^2}{r^3} \sum_{p=Lune}^{Soleil} \sum_{m=0}^2 \bar{P}_{2m}(\sin \phi) (\bar{C}_{2m_p} \cos m\lambda + \bar{S}_{2m_p} \sin m\lambda) \quad (7.8)$$

avec, pour $m = 0, 1$ ou 2 :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C}_{2m \text{ Lune+Soleil}} \\ \bar{S}_{2m \text{ Lune+Soleil}} \end{array} \right\} = \frac{k_{2m} R_e^3}{5 M} \sum_{p=Lune}^{Soleil} \frac{m_p}{r_p^3} \bar{P}_2(\sin \phi_p) \left\{ \begin{array}{l} \cos(m\lambda_p) \\ \sin(m\lambda_p) \end{array} \right. \quad (7.9)$$

où $\bar{C}_{2m \text{ Lune+Soleil}}$ et $\bar{S}_{2m \text{ Lune+Soleil}}$ subissent aussi la correction fréquentielle des nombres de Love. Ces deux coefficients correspondent à la contribution à la même fréquence de la Lune et du Soleil (voir IERS Conventions 1996). On note que $k_{20} = 0.3019$ est un nombre de Love non dépendant de la fréquence de marée (voir IERS Conventions 1996) (tout comme $k_{21} = 0.2983$ et $k_{22} = 0.30102$), m_{Lune} est la masse de la Lune, m_{Soleil} est la masse du Soleil, r_{Lune} est la distance géocentrique à chaque instant à la Lune, et r_{Soleil} celle au Soleil.

Ainsi, en écrivant l'égalité des équations Eq. (7.8) et Eq. (7.4), puis en identifiant membre à membre, on peut déterminer la partie variable du potentiel gravitationnel terrestre d'ordre 2 provenant des marées solides :

$$\begin{aligned} & \frac{G M}{r} \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 \bar{P}_{2m}(\sin \phi) (\bar{C}_{2m}(t) \cos m\lambda + \bar{S}_{2m}(t) \sin m\lambda) \\ &= G M \frac{R_e^2}{r^3} \bar{P}_{2m}(\sin \phi) (\bar{C}_{2m \text{ Lune+Soleil}} \cos m\lambda + \bar{S}_{2m \text{ Lune+Soleil}} \sin m\lambda) \end{aligned} \quad (7.10)$$

pour $m = 0, 1$ ou 2 . Par conséquent, on obtient :

$$\bar{C}_{2m | \text{marees terr.}} = \bar{C}_{2m \text{ Lune+Soleil}} \quad (7.11)$$

$$\bar{S}_{2m | \text{marees terr.}} = \bar{S}_{2m \text{ Lune+Soleil}} \quad (7.12)$$

Nous avons tracé les variations temporelles du \bar{C}_{20} terrestre dues aux marées solides (voir Fig. 7.7), ainsi que les variations des coefficients d'ordre 1 et 2 (voir Figs. 7.11 et 7.14). Nous pouvons noter que ces variations de \bar{C}_{20} comportent encore une partie constante, généralement appelée marée permanente (ou *permanent tide* en anglais), que nous devons soustraire (voir Fig. 7.8). Si on l'estime, on obtient : -4.215114×10^{-9} (sachant que la valeur correspondante de l'IERS est : -4.201×10^{-9}).

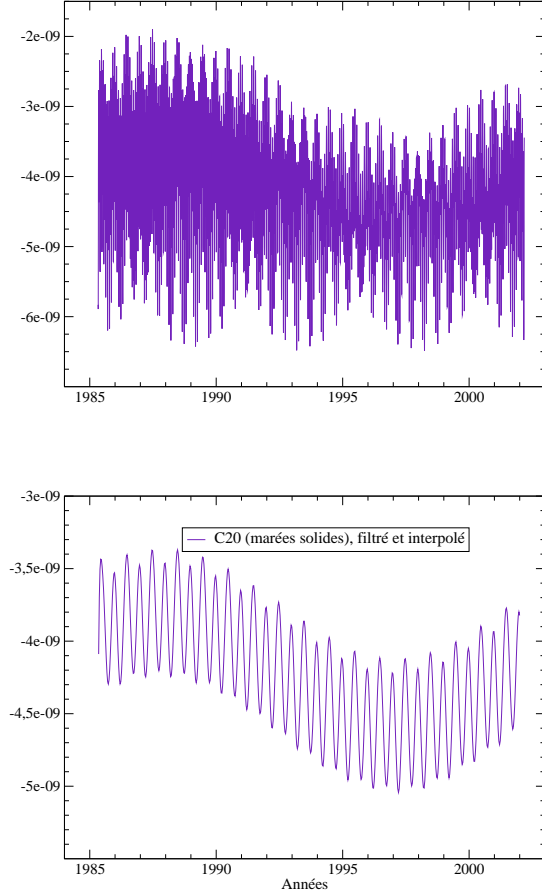


FIG. 7.7 – $\Delta\bar{C}_{20}$ normalisé dû aux marées terrestres solides (En haut : données brutes - Eq. (7.9) et Eq. (7.11); En bas : données filtrées, où les signaux de haute fréquence ont été enlevés) : partie modélisée provenant des marées solides du $\Delta\bar{C}_{20}$; IERS Conventions 1996.

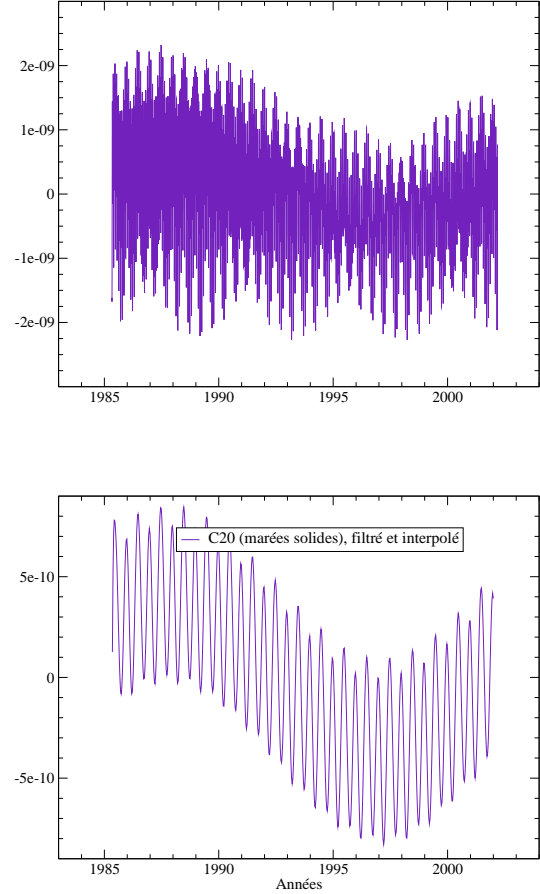


FIG. 7.8 – $\Delta\bar{C}_{20}$ normalisé dû aux marées terrestres solides, sans la marée permanente.

7.2.3 Variations dues aux Marées océaniques

Le potentiel de Marée océanique s'écrit de la manière suivante (IERS Conventions 1996) :

$$U(r, \phi, \lambda, t) = 4 \pi G R_e \sum_n \sum_{+} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1+k'_l}{2l+1} \left(\frac{R_e}{r} \right)^{l+1} \sum_{m=0}^l q_{n,l,m}^{\pm}(\phi, \lambda, t) \quad (7.13)$$

où $q = \rho_W h$ est la charge de marée, avec $\rho_W = 1025 \text{ kg m}^{-3}$ la densité moyenne de l'eau de mer. Le fait de sommer sur n correspond au développement en ondes de marées de Doodson dont les arguments associés sont θ_n et χ_n . Le deuxième signe somme correspond aux ondes progrades et rétrogrades, toutes deux considérées. La hauteur d'eau h , qui doit être exprimée en mètres, s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} h &= \sum_n \sum_{+} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \hat{C}_{n,l,m}^{\pm} \sin(\theta_n(t) + \chi_n \pm m\lambda + \epsilon_{n,l,m}^{\pm}) \bar{P}_{lm}(\sin \phi) \\ &= \sum_n \sum_{+} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \bar{P}_{lm}(\sin \phi) (C_{n,l,m}^{\pm} \cos(\theta_n(t) + \chi_n \pm m\lambda) + S_{n,l,m}^{\pm} \sin(\theta_n(t) + \chi_n \pm m\lambda)) \end{aligned} \quad (7.14)$$

où $\epsilon_{n,l,m}^{\pm}$ est la phase et $\hat{C}_{n,l,m}^{\pm}$ l'amplitude normalisée du modèle harmonique de marées. Ainsi, on écrit : $C_{n,l,m}^{\pm} = \hat{C}_{n,l,m}^{\pm} \sin(\epsilon_{n,l,m}^{\pm})$ ainsi que $S_{n,l,m}^{\pm} = \hat{C}_{n,l,m}^{\pm} \cos(\epsilon_{n,l,m}^{\pm})$. Si on se restreint au degré 2, on a :

$$U_{2m}(r, \phi, \lambda, t) = 4 \pi G R_e \frac{1+k'_2}{5} \left(\frac{R_e}{r} \right)^3 \rho_W \bar{P}_{2m}(\sin \phi) \alpha_m \quad (7.15)$$

pour $m = 0, 1$ ou 2 , où α_m (qui est normalisé) est exprimé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \sum_n \sum_{+} C_{n,2,m}^{\pm} \cos(\theta_n(t) + \chi_n \pm m\lambda) + S_{n,2,m}^{\pm} \sin(\theta_n(t) + \chi_n \pm m\lambda) \\ &= \sum_n \sum_{+} [C_{n,2,m}^{\pm} \cos(\theta_n(t) + \chi_n) + S_{n,2,m}^{\pm} \sin(\theta_n(t) + \chi_n)] \cos m\lambda \\ &\quad \pm [-C_{n,2,m}^{\pm} \sin(\theta_n(t) + \chi_n) + S_{n,2,m}^{\pm} \cos(\theta_n(t) + \chi_n)] \sin m\lambda \end{aligned} \quad (7.16)$$

Ainsi, en identifiant Eq. (7.15) avec l'équation Eq. (7.4) du potentiel gravitationnel terrestre d'ordre 2, la contribution des marées océaniques à la partie variable de ce même potentiel est la suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{G M}{r} \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 \bar{P}_{2m}(\sin \phi) (\bar{C}_{2m}(t) \cos m\lambda + \bar{S}_{2m}(t) \sin m\lambda) \\ &= 4 \pi G R_e \frac{1+k'_2}{5} \left(\frac{R_e}{r} \right)^3 \rho_W \bar{P}_{2m}(\sin \phi) \alpha_m \end{aligned} \quad (7.17)$$

pour $m = 0, 1$ ou 2 . Par conséquent, on obtient :

$$\mu = \frac{4 \pi R_e^2 (1 + k'_2) \rho_W}{5 M}$$

$$\bar{C}_{2m} |_{\text{marees oc.}} = \mu \sum_n \sum_{+}^{-} C_{n,2,m}^{\pm} \cos(\theta_n(t) + \chi_n) + S_{n,2,m}^{\pm} \sin(\theta_n(t) + \chi_n) \quad (7.18)$$

$$\bar{S}_{2m} |_{\text{marees oc.}} = \mu \sum_n \sum_{+}^{-} -C_{n,2,m}^{\pm} \sin(\theta_n(t) + \chi_n) + S_{n,2,m}^{\pm} \cos(\theta_n(t) + \chi_n) \quad (7.19)$$

pour $m = 0, 1$ ou 2 . Nous avons tracé ces effets de contribution des marées océaniques aux variations temporelles du \bar{C}_{20} terrestre (voir Fig. 7.9), ainsi qu'aux autres coefficients de degré 2 (voir Figs. 7.11 et 7.14).

Finalement, on peut tracer la série totale de variations temporelles de \bar{C}_{20} (voir Fig. 7.10) où les modèles a priori développés ci-dessus ont été rajoutés à la série des résidus (i.e. observations) (voir Fig. 7.1).

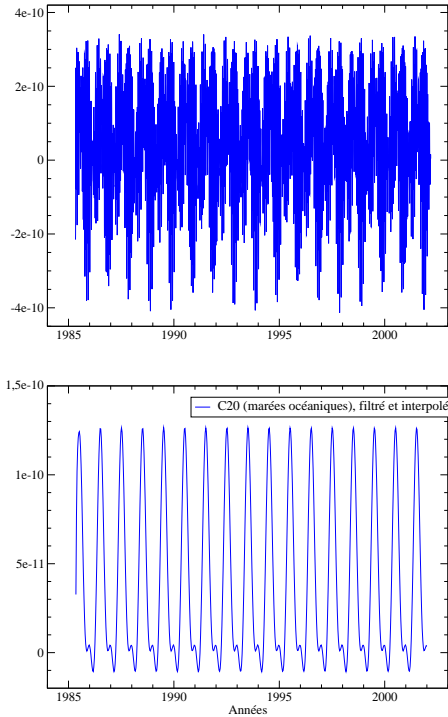


FIG. 7.9 – $\Delta \bar{C}_{20}$ normalisé dû aux marées océaniques (En haut : données brutes - Eq. (7.18); En bas : données filtrées, où les signaux de haute fréquence ont été enlevés) : partie modélisée provenant des marées océaniques du $\Delta \bar{C}_{20}$; IERS Conventions 1996.

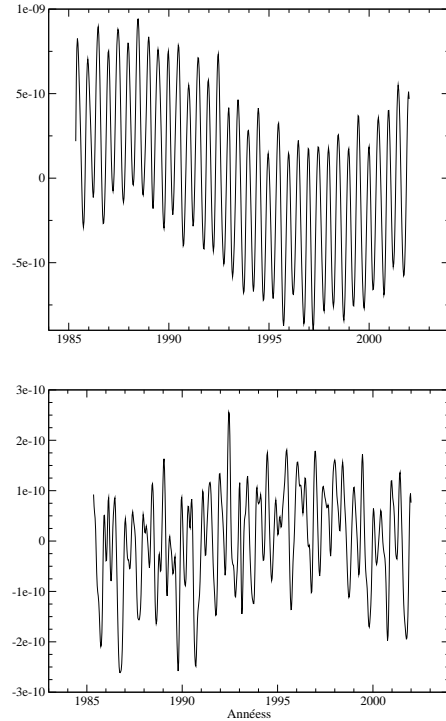


FIG. 7.10 – $\Delta \bar{C}_{20}$ normalisé total, où les modèles a priori de variations de \bar{C}_{20} dues aux variations de pression atmosphérique et aux marées océaniques et terrestres ont été rajoutés aux résidus (En haut : Série totale; En bas : Série sans la contribution des marées solides).

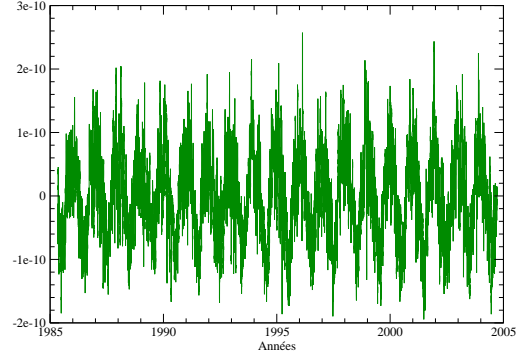
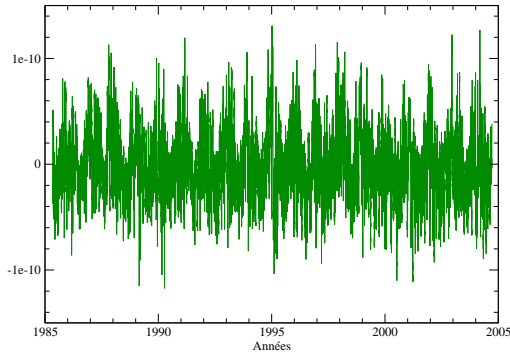
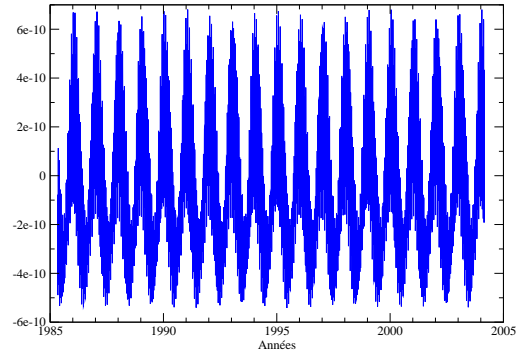
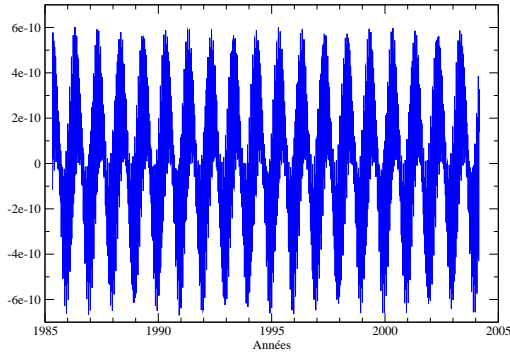
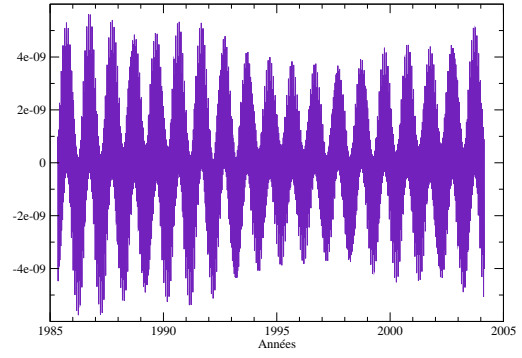
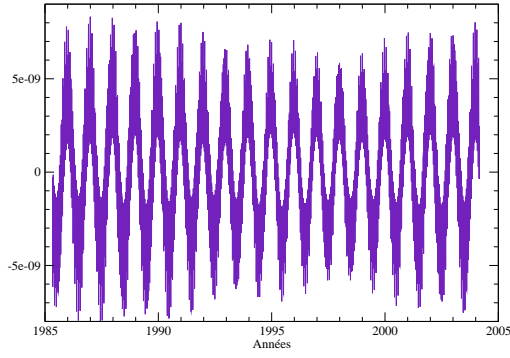


FIG. 7.11 – Modèles a priori de variations temporelles de \bar{C}_{21} dues (i) aux marées solides (haut), (ii) aux marées océaniques (milieu) et (iii) à la pression atmosphérique (bas).

FIG. 7.12 – Modèles a priori de variations temporelles de \bar{S}_{21} dues (i) aux marées solides (haut), (ii) aux marées océaniques (milieu) et (iii) à la pression atmosphérique (bas).

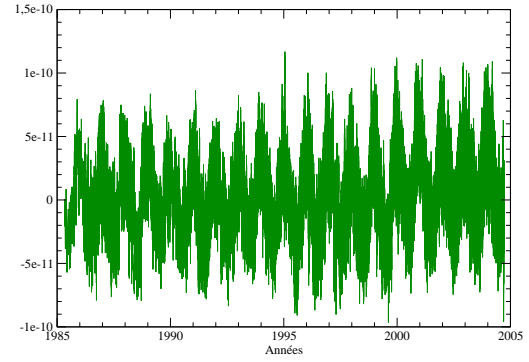
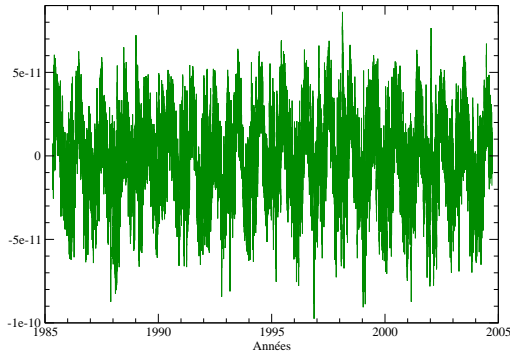
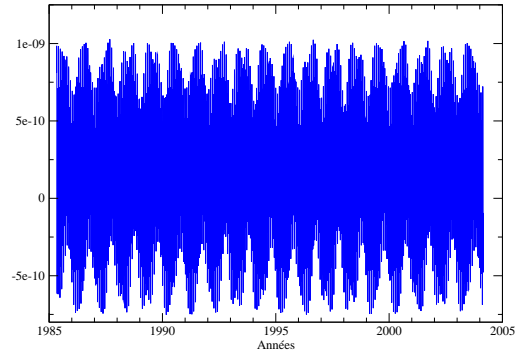
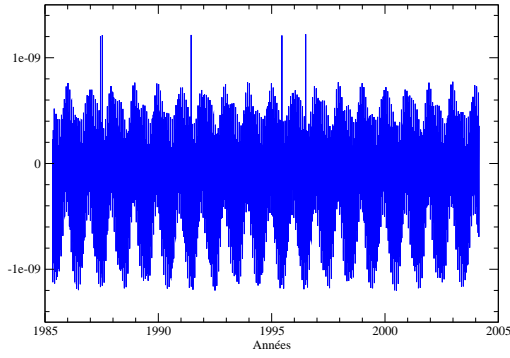
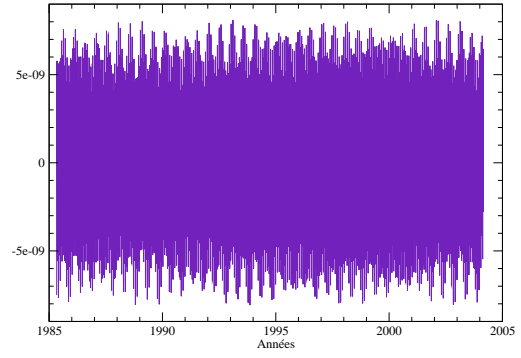
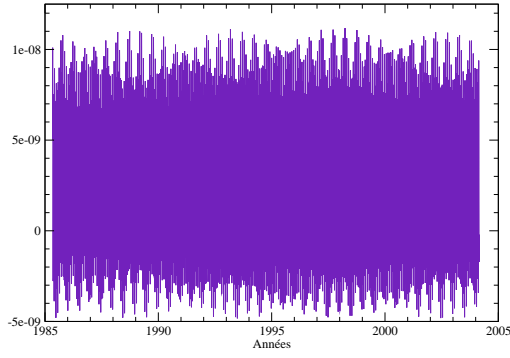


FIG. 7.13 – Modèles a priori de variations temporelles de \bar{C}_{22} dues (i) aux marées solides (haut), (ii) aux marées océaniques (milieu) et (iii) à la pression atmosphérique (bas).

FIG. 7.14 – Modèles a priori de variations temporelles de \bar{S}_{22} dues (i) aux marées solides (haut), (ii) aux marées océaniques (milieu) et (iii) à la pression atmosphérique (bas).

7.3 Nouvelle détermination du champ de gravité variable

Les équations normales (voir §2.3.2, Eq. (2.26)) relatives aux satellites Lageos I et Lageos II ont été retraitées par le GRGS, afin de les combiner pour redéterminer les variations temporelles des coefficients de degré 2 du champ de gravité terrestre (comme annoncé au §7.1). La période retraitée couvre les années 1985 à 2004. Plus particulièrement, les données issues du satellite Lageos I vont du 9 Mai 1985 au 9 avril 2004 et celles de Lageos II du 10 Octobre 1992 au 9 Avril 2004. Des arcs de 10 jours ont été traités dans le logiciel (GINS) d'orbitographie du GRGS/CNES, et le champ statique EIGEN-GRACE02S a été utilisé (voir Fig. 5.6), afin de mieux déterminer les séries temporelles des coefficients de Stokes de degré 2 (Lemoine et al. 2004).

Nous allons décrire ces nouvelles séries obtenues par le GRGS, ainsi que les comparaisons avec les précédentes, issues de la combinaison de plusieurs satellites (GRIM5), mais non homogènes sur toute la période étudiée ici.

7.3.1 Résultats

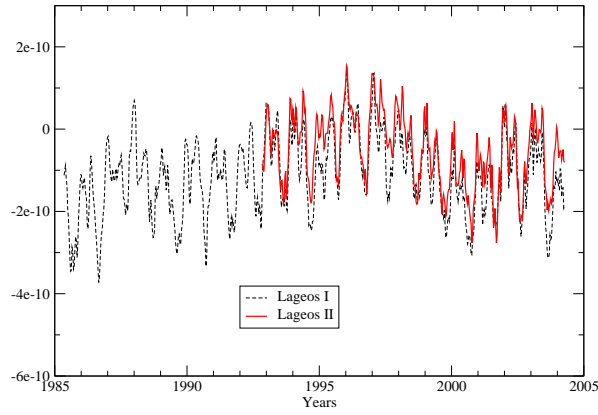
Les séries de coefficients de degré 2 du potentiel de gravité terrestre de 1985 à nos jours obtenues lors du traitement décrit précédemment (Biancale & Lemoine 2004) sont issues des équations normales de Lageos I ou bien de Lageos II (voir Fig. 7.15(a)), ou encore de leur combinaison (voir Fig. 7.15(b)).

L'ensemble des coefficients degré 2 du champ de gravité terrestre a été traité, puisqu'il nous intéresse pour les études de la rotation de la Terre. La série finale qui sera utilisée dans les études de la troisième partie sur la longueur du jour et le mouvement du pôle (correspondant à C_{20} , C_{21} et S_{21}) est la série combinée, avec des contraintes de continuité, issue du traitement des équations normales combinées de Lageos I et Lageos II (voir Fig. 7.15(b) et Fig. 7.16). Cette combinaison est nécessaire afin de décoreller les coefficients du potentiel de gravité terrestre (voir §2.4.1).

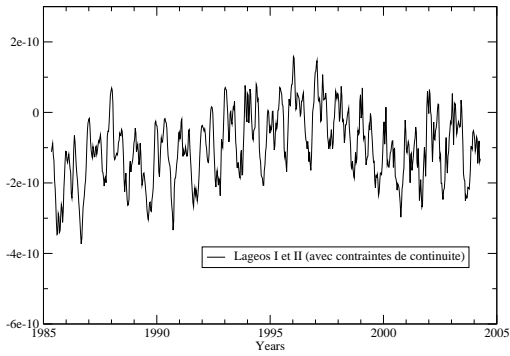
Des contraintes de continuité ont été appliquées (voir Fig. 7.15(b) et Fig. 7.15(c)) afin que la série obtenue n'ait pas une trop grande dispersion (écart de l'ordre de 10^{-11} par rapport à la moyenne).

7.3.2 Comparaisons

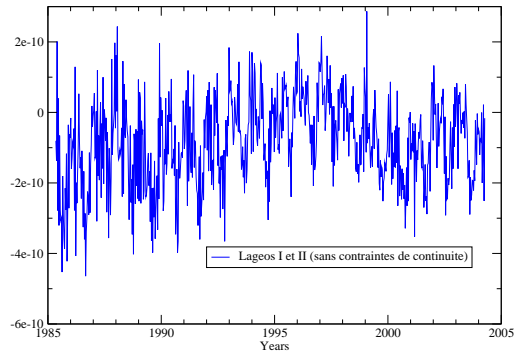
Comparons les résultats obtenus au paragraphe précédent pour le coefficient \bar{C}_{20} avec la série issue du modèle GRIM5. Nous constatons que le pic à la période d'environ 10 jours apparaissant dans les données de \bar{C}_{20} de GRIM5 (voir §7.1) a disparu lors de la redétermination des équations normales de Lageos I et Lageos II (voir Fig. 7.17). Cette dernière série est comme prévu plus homogène, et le phénomène en cause devait provenir d'un aliasing dans l'ancien traitement.



(a) Séries issues des équations normales (avec contraintes de continuité) d'une part (i) de Lageos I seul, puis d'autre part (ii) de Lageos II seul.

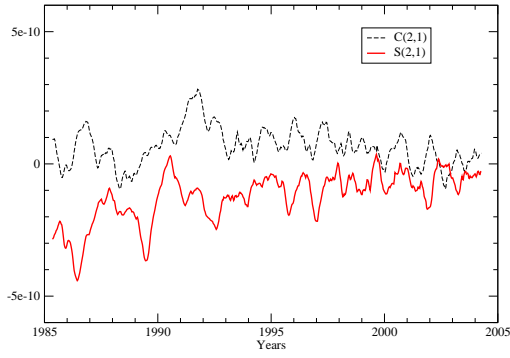


(b) Série combinée avec contraintes de continuité.

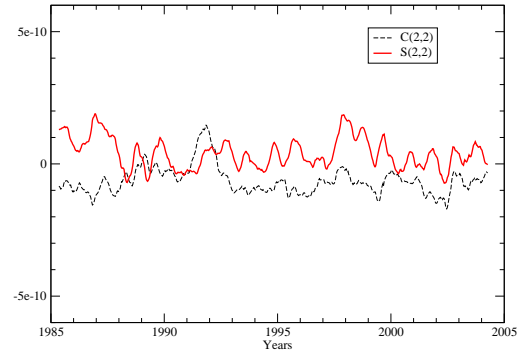


(c) Série combinée sans les contraintes de continuité.

FIG. 7.15 – Variations temporelles du coefficient \bar{C}_{20} du potentiel de gravité terrestre, issues de la redétermination des équations normales de Lageos I et Lageos II, de 1985 à 2004.

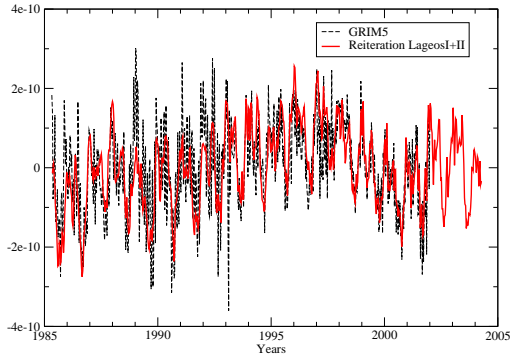


(a) Variations temporelles des coefficients \bar{C}_{21} et \bar{S}_{21} .

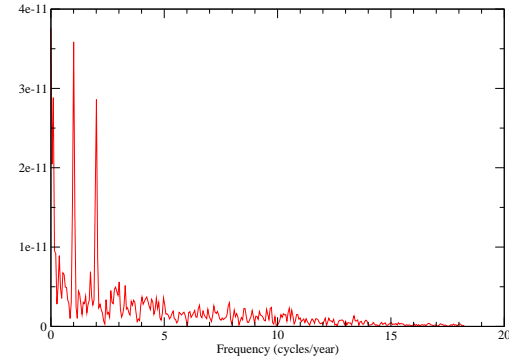


(b) Variations temporelles des coefficients \bar{C}_{22} et \bar{S}_{22} .

FIG. 7.16 – Variations temporelles des coefficients de degré 2 puis d'ordre 1 et 2 du potentiel de gravité terrestre, issues de la redétermination des équations normales de Lageos I et Lageos II, de 1985 à 2004.



(a) Comparaison des séries de variations temporelles de \bar{C}_{20} issues du modèle GRIM5 et de la nouvelle itération détaillée dans ce paragraphe.



(b) Spectre de Fourier de la nouvelle série de \bar{C}_{20} combinée (voir Fig. 7.15(b)).

FIG. 7.17 – Comparaison entre la redétermination des équations normales de Lageos I et Lageos II, et l'ancien modèle GRIM5.

7.4 Détermination basée sur des contraintes issues de données de la mission GRACE

Nous avons poursuivi nos investigations sur la nouvelle itération des séries de coefficients de degré 2 du potentiel de gravité terrestre, en étudiant si les données issues du satellite GRACE ne pouvaient pas nous apporter des informations supplémentaires. Ce satellite permet de déterminer les variations temporelles du champ de gravité par la mesure de la variation de distance entre les deux satellites co-orbitaux GRACE-A et GRACE-B (voir §5.3). Nous nous sommes donc demandé si l'apport de ces données du champ variable ne pouvait pas nous permettre de mieux décorréler les coefficients de degré 2 par rapport aux autres coefficients de Stokes. En effet, seulement deux satellites ont été utilisés lors de la redétermination présentée au §7.3, alors qu'initialement dans le traitement GRIM5 il y en avait une vingtaine.

Nous avons donc tout d'abord étudié les données disponibles de GRACE, afin d'en tirer une modélisation, que nous avons introduite dans nos traitements. Nous allons présenter les résultats obtenus.

7.4.1 Données de la mission GRACE utilisées

Actuellement, environ deux années de données GRACE ont été traitées au CSR (*Center for Space Research*) à l'Université du Texas (Austin, USA). Ce sont :

- des données de positionnement laser et GPS du satellite,
- des accélérations mesurées par les deux accéléromètres embarqués,
- des mesures de distance inter-satellites.

Elles sont utilisées dans un logiciel d'orbitographie où l'on ajuste ces données par rapport à des modèles (voir §2.3). En particulier, les valeurs mensuelles pour chacun des coefficients du champ de gravité terrestre sont déterminées.

Les séries temporelles des coefficients du potentiel de gravité du degré 2 au degré 4, ainsi que des coefficients zonaux jusqu'au degré 10 (voir Fig. 7.18 - Fig. 7.21), obtenues par le CSR ont été tracées. Nous pouvons constater que \bar{C}_{20} ne coïncide pas avec la série obtenue en traitant des satellites observés par télémétrie laser (sur la base du modèle GRIM5). Dans la Figure 7.18, on note une bien meilleure correspondance entre les deux séries pour les coefficients \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} , \bar{C}_{22} et \bar{S}_{22} .

Sur cette base, nous avons modélisé ces variations (des coefficients du géopotential de degré 3 et 4, puis des zonaux du degré 3 au degré 10) de manière annuelle et semi-annuelle et nous les avons introduites dans le traitement des nouvelles équations normales de Lageos I et Lageos II (§7.3), sous forme de contraintes. Nous allons étudier si cela nous permet de mieux résoudre les coefficients de degré 2 du potentiel gravitationnel terrestre, et si ces derniers sont notablement différents (obtenus avec les contraintes) de ceux obtenus au §7.3.

7.4.2 Résultats et Comparaisons

Les deux méthodes suivantes induisent des différences dans les séries correspondantes de coefficients de degré 2 du potentiel gravitationnel terrestre :

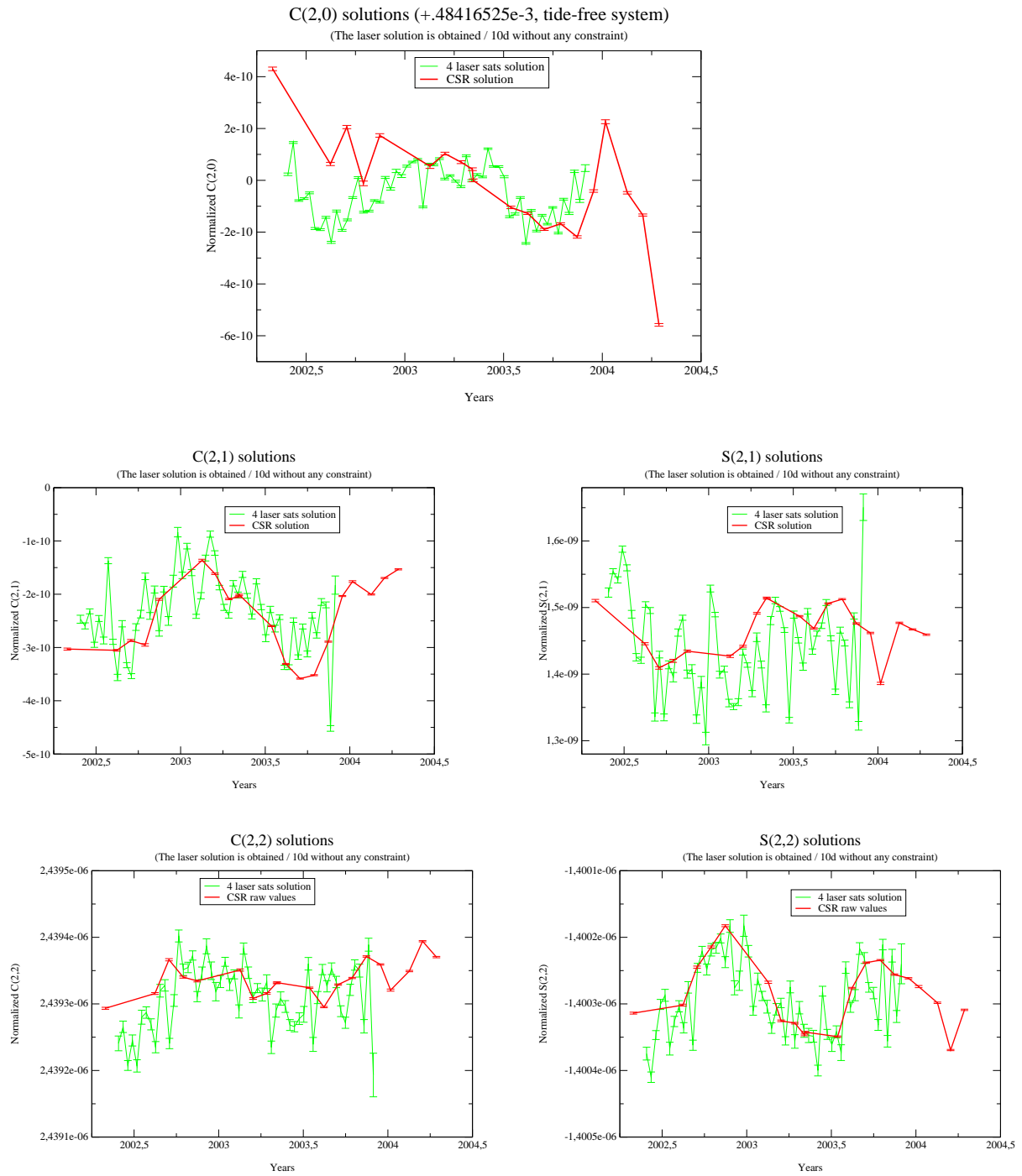


FIG. 7.18 – Séries temporelles des coefficients de degré 2 du potentiel gravitationnel terrestre, issues des données GRACE (CSR, Texas-USA).

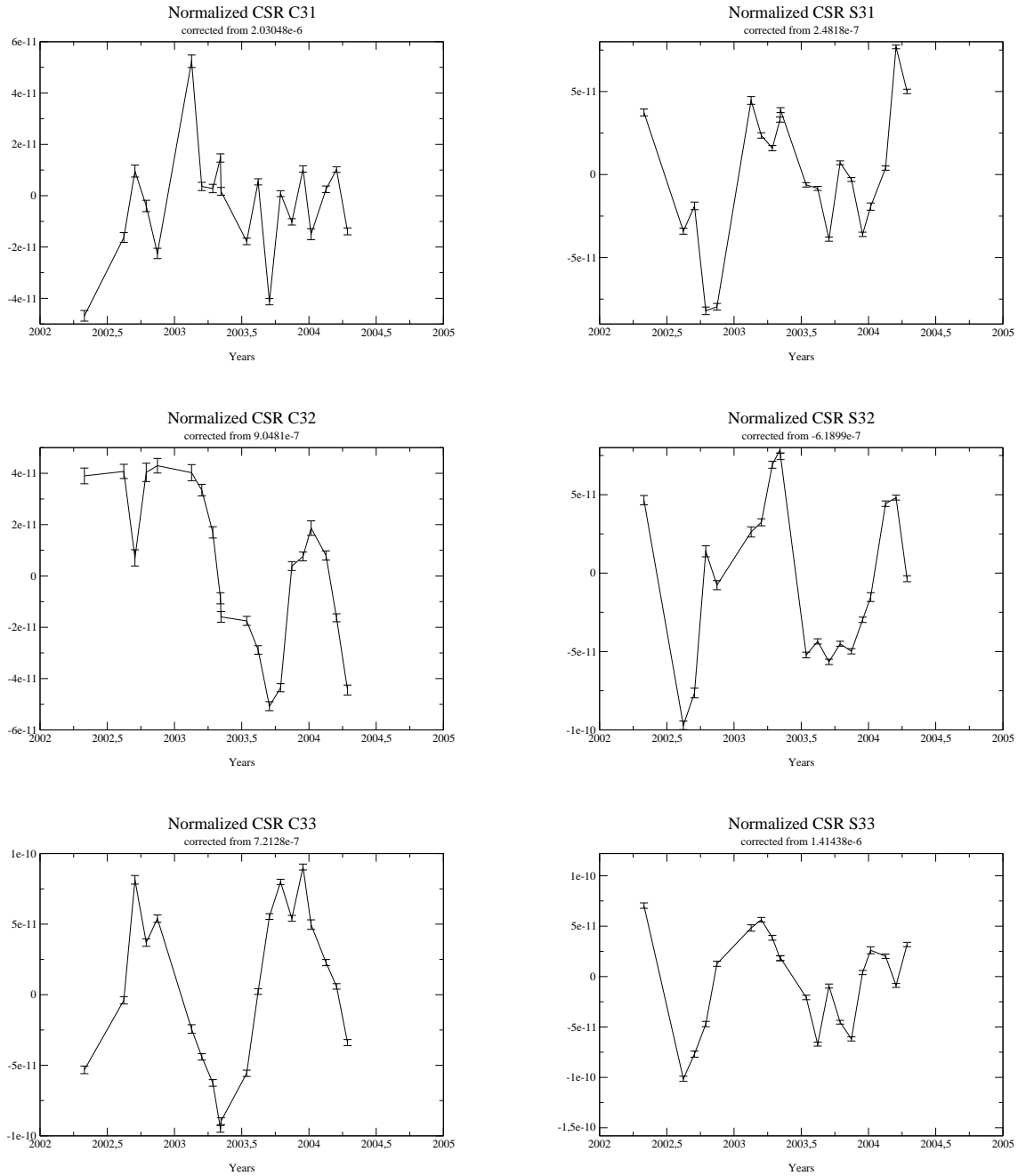


FIG. 7.19 – Séries temporelles des coefficients de degré 3 du potentiel gravitationnel terrestre, issues des données GRACE (CSR, Texas-USA).

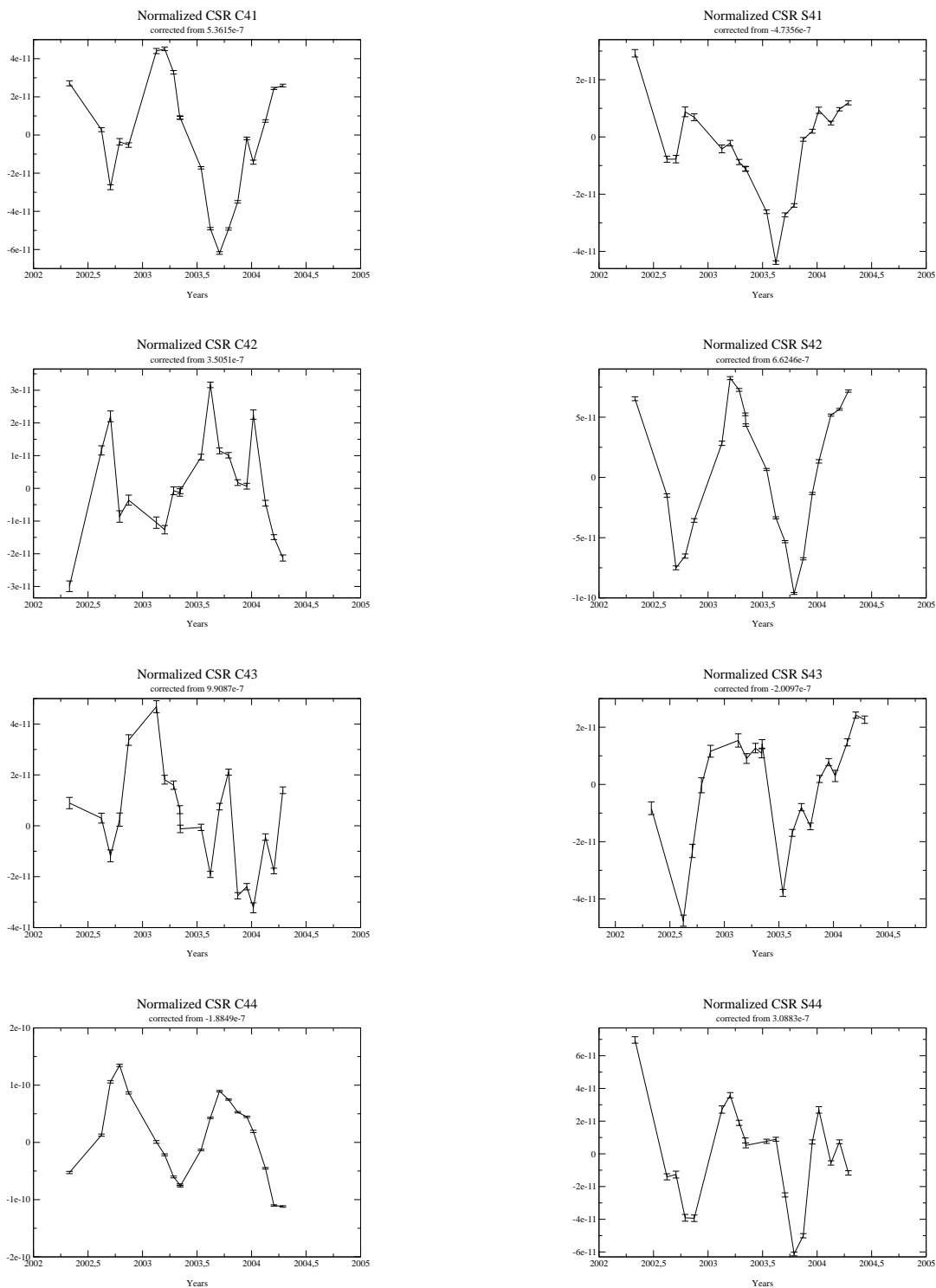


FIG. 7.20 – Séries temporelles des coefficients de degré 4 du potentiel gravitationnel terrestre, issues des données GRACE (CSR, Texas-USA).

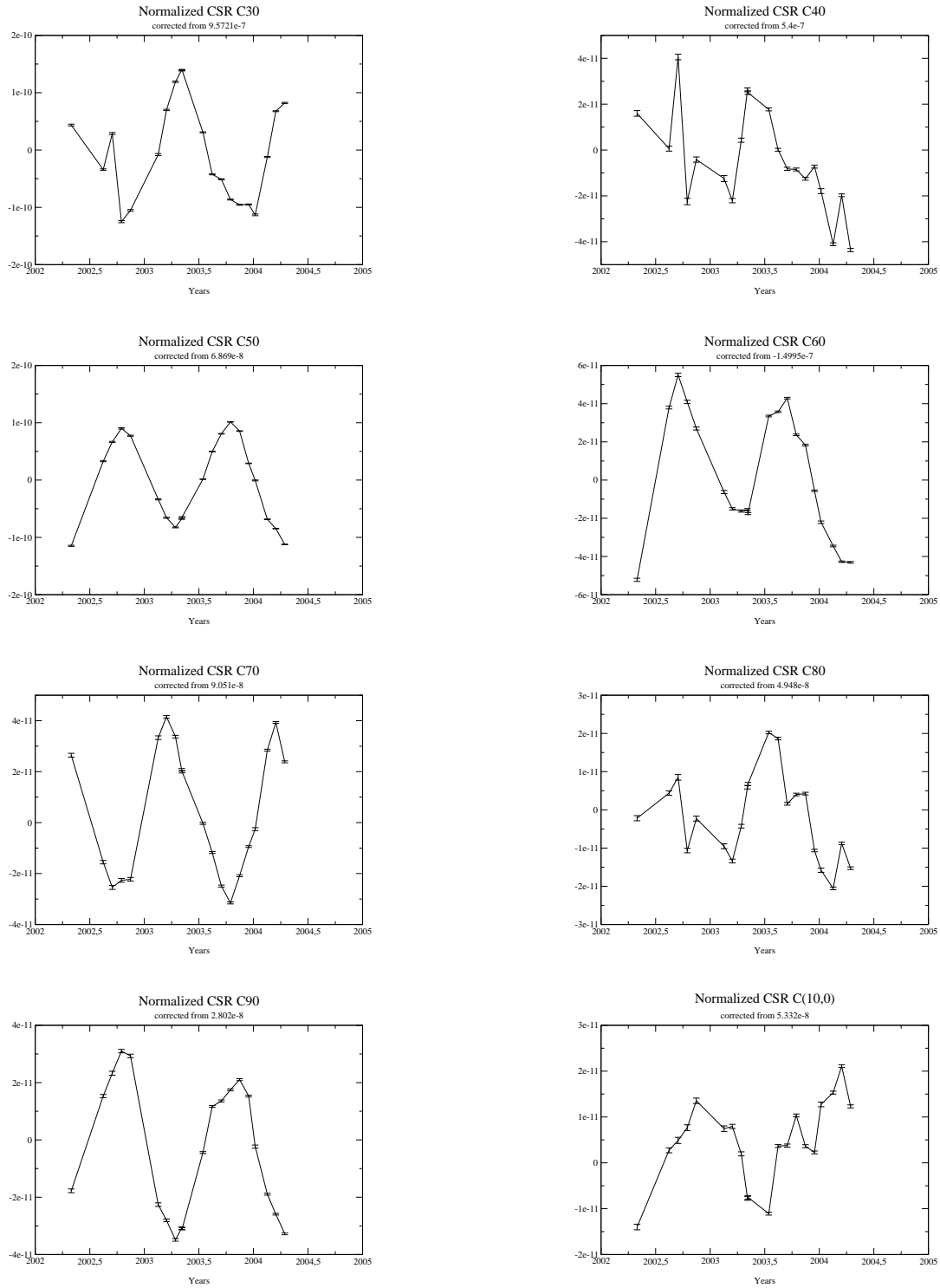
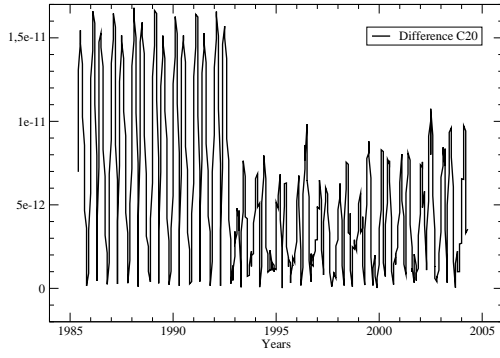
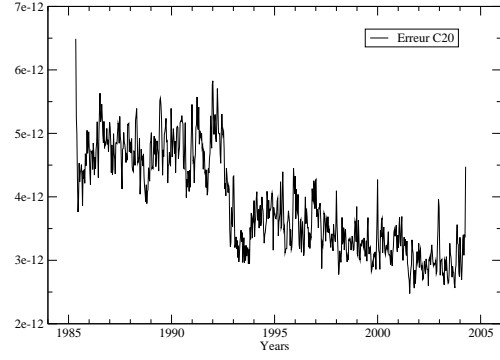


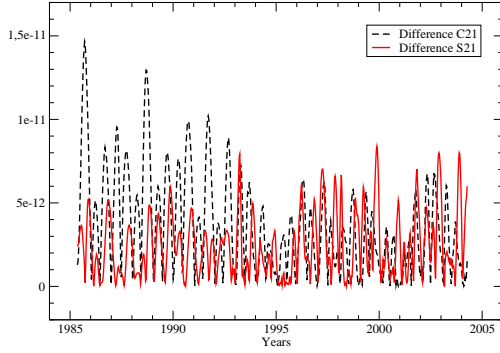
FIG. 7.21 – Séries temporelles des coefficients zonaux (du degré 3 au degré 10) du potentiel gravitationnel terrestre, issues des données GRACE (CSR, Texas-USA).



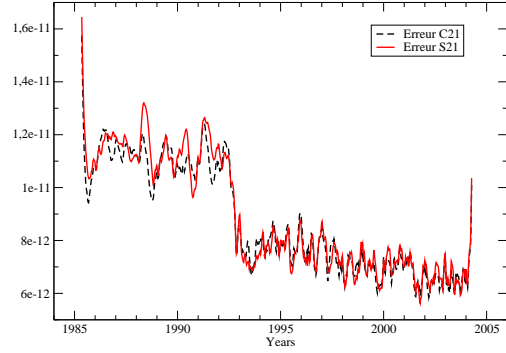
(a) Différence en valeur absolue \bar{C}_{20} .



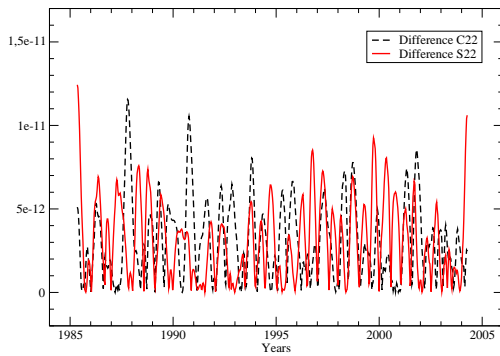
(b) Erreur dans l'ajustement de \bar{C}_{20} .



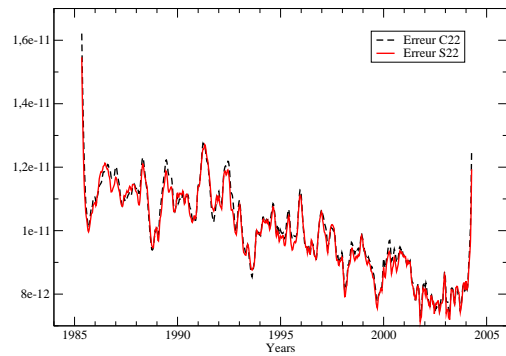
(c) Différence en valeur absolue \bar{C}_{21} et \bar{S}_{21} .



(d) Erreur dans l'ajustement de \bar{C}_{21} et \bar{S}_{21} .



(e) Différence en valeur absolue \bar{C}_{22} et \bar{S}_{22} .



(f) Erreur dans l'ajustement de \bar{C}_{22} et \bar{S}_{22} .

FIG. 7.22 – Pour chaque coefficient de degré 2 du potentiel de gravité terrestre, on compare les valeurs obtenues par les deux manières différentes suivantes : (i) par la méthode dite "Redétermination", puis (ii) par la méthode dite "Redétermination avec contraintes" .

- La redétermination des coefficients de degré 2 du potentiel de gravité du §7.3 (méthode nommée pour la suite "*Redétermination*") (Biancale & Lemoine 2004),
- La redétermination des coefficients de degré 2 du potentiel de gravité du §7.3, contrainte par des données issues de l'étude des satellites GRACE (i.e. données de variations temporelles de certains autres coefficients du géopotential) (méthode nommée par la suite "*Redétermination avec contraintes*"). Les données de contrainte utilisées précédemment sont des modèles annuels et semi-annuels ajustés sur les séries temporelles CSR de coefficients du champ de gravité GRACE (i.e. coefficients J_3 , J_4 , C_{31} , etc ...).

Calculons les différences en valeur absolue entre les deux séries (pour chacun des 5 coefficients de degré 2 du géopotential). Comparons ensuite ces différences aux erreurs d'estimation faites lors de l'ajustement des coefficients de degré 2 dans le logiciel d'orbitographie.

Pour le coefficient \bar{C}_{20} du géopotential, les différences entre les deux séries sont plus importantes au début de l'intervalle d'étude (voir Fig. 7.22(a)). Ceci est dû au fait que jusqu'en 1992, seul Lageos I est utilisé dans le traitement du §7.3. Dans ce cas, les contraintes par les données GRACE permettent d'améliorer la détermination et la différence entre les deux séries s'en ressent. Alors que pour la période où Lageos II est ajouté au traitement (ce qui induit une meilleure décorelation des coefficients), ces contraintes deviennent moins nécessaires et la différence entre les deux séries est donc moindre (voir Fig. 7.22(b)).

Notons que les différences entre les deux types de séries des coefficients de degré 2 (voir Fig. 7.22(a), Fig. 7.22(c) et Fig. 7.22(e)) ne sont pas significatives par rapport aux erreurs engendrées par l'ajustement (voir Fig. 7.22(b), Fig. 7.22(d) et Fig. 7.22(f), respectivement), aux mêmes dates.

7.5 Conclusion

Nous avons tout d'abord détaillé dans ce Chapitre les modèles a priori implémentés dans le logiciel d'orbitographie (GINS) du GRGS/CNES, qui nous permettent d'ajuster les coefficients de Stokes suivants : \bar{C}_{20} , \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} , \bar{C}_{22} et \bar{S}_{22} . Ces modèles permettent d'établir la contribution des marées terrestres solides, des marées océaniques ou bien des variations de pression atmosphérique à ces variations du géopotential. Les séries que nous avons déterminées nous permettront de traiter la Terre en tant que système global dans la troisième partie de cette thèse.

Ce Chapitre nous a ensuite permis de présenter la redétermination des coefficients de degré 2 du potentiel gravitationnel terrestre effectuée au GRGS, sur la base des mesures de positionnement des satellites Lageos I et Lageos II, entre 1985 et 2004 (Lemoine et al. 2004, Biancale & Lemoine 2004). Ceci nous permet de disposer de séries plus homogènes, basées sur un champ de gravité statique GRACE très précis.

Enfin, nous avons montré comment nous avons contraint cette redétermination par des données de variations temporelles GRACE d'autres coefficients du géopotential. Cependant, cette contrainte n'a pas apporté d'améliorations significatives. Toutefois, nous ne disposons que de moins de deux années de données GRACE afin d'établir les ajustements et les modèles de contrainte. C'est un intervalle de temps encore trop faible pour pouvoir tirer une conclusion définitive.

Chapitre 8

Conclusion de la Deuxième Partie

Dans cette Partie de la thèse, nous avons décrit les missions gravimétriques CHAMP et GRACE, dont nous avons utilisé certaines données. Ces satellites ont une grande importance dans la détermination du champ de gravité statique et variable. Nous commençons à disposer des données des satellites GRACE qui apportent des résultats probants sur le champ de gravité statique et variable. Par contre, le coefficient du potentiel gravitationnel terrestre de degré 2 et d'ordre 0, qui est un paramètre fondamental pour l'étude de la rotation terrestre via le champ de gravité, ne semble pas aussi bien déterminé par le satellite GRACE que les autres coefficients. Ce satellite n'est pas optimal pour déterminer $J_2 = -C_{20}$, notamment car il est situé bas en altitude. C'est pourquoi les satellites situés à des altitudes de l'ordre de 5000 km, comme ceux positionnés par télémétrie laser, seront encore utiles afin de déterminer les variations temporelles de \bar{C}_{20} .

Nous avons présenté une étude faite sur les méthodes d'intégration numérique pour le calcul d'orbite, dans laquelle nous avons comparé la méthode de Cowell, généralement utilisée, avec celle d'Encke. Une telle étude s'est avérée nécessaire dans l'optique du traitement des données du satellite GRACE, avec le logiciel GINS du CNES/GRGS. La mesure inter-satellite étant d'une précision de l'ordre de 10 micromètres, il ne fallait pas perdre un tel avantage lors des opérations d'intégration numérique pour le calcul de l'orbite du satellite. La méthode d'Encke est basée sur l'intégration de la position du satellite par rapport à une orbite analytique moyenne. L'idée sous-jacente était donc d'intégrer en relatif par rapport à une même orbite de référence les orbites des deux satellites GRACE. Suite aux tests effectués, la méthode de Cowell s'est avérée très précise par rapport au bruit des mesures du satellite GRACE, et la méthode d'Encke n'a finalement pas apporté d'amélioration supplémentaire.

Enfin, nous avons décrit les nouvelles séries du GRGS de degré 2 des coefficients du géopotential, basées sur la redétermination des équations normales de Lageos I et Lageos II, entre 1985 et 2004. Elles sont, comme prévu, plus homogènes que les anciennes séries, issues du modèle GRIM5. Les contraintes introduites en supplément, grâce à des données GRACE de variations temporelles de coefficients du géopotential, n'ont pas apporté d'améliorations significatives à ces séries.

L'utilisation de ces séries temporelles de \bar{C}_{20} , \bar{C}_{21} et \bar{S}_{21} pour étudier les variations des paramètres d'orientation terrestres (EOP) fait l'objet de la Partie suivante.

Troisième partie

Analyse et interprétation de l'influence des variations du champ de gravité sur les paramètres d'orientation terrestre

Chapitre 9

Vitesse de rotation terrestre : Durée du jour

9.1 Introduction

Dans le Chapitre 3, nous avons donné les équations reliant les variations de la longueur du jour $\Delta(LOD)$ (par rapport à une durée du jour solaire moyen de 86400 s SI) à celles du coefficient harmonique sphérique C_{20} du potentiel gravitationnel terrestre. Le but de ce chapitre est de comparer le $\Delta(LOD)$ observé, avec celui correspondant à la série temporelle de C_{20} . Ceci afin d'évaluer quelles informations géophysiques (sur la rotation terrestre) peuvent nous apporter ces séries temporelles géodésiques.

Nous allons utiliser la série C04 de $\Delta(LOD)$ obtenue à l'IERS (notée $\Delta(LOD)_{C04}$), couvrant la période de 1962 à 2004. Cette série est obtenue grâce à des combinaisons de mesures VLBI et satellites (voir Table 1.5). Nous disposons également de la série de variations temporelles de C_{20} décrite au Chapitre 7 (§7.3, Fig. 7.15(b)), et obtenue grâce à la redétermination du champ de gravité basée sur les équations normales de Lageos I et II (Biancale & Lemoine 2004), couvrant la période de 1985 à 2004.

Les causes géophysiques de variation de la longueur du jour sont relativement bien connues de nos jours, et l'on sait en particulier qu'une majeure partie de ce phénomène est due aux déplacements atmosphériques ($\simeq 90\%$). De plus, l'effet des variations du coefficient harmonique sphérique C_{20} , qui n'est sensible qu'aux répartitions de masse (dans la Terre globale), ne contribue qu'à la partie *matière* de la fonction d'excitation du $\Delta(LOD)$. Par conséquent, afin d'étudier la composante du $\Delta(LOD)$ due aux variations de C_{20} , il nous faudra retirer du $\Delta(LOD)$ observé (i.e. $\Delta(LOD)_{C04}$) cet effet prépondérant de la partie *mouvements*, qui est bien modélisé.

Pour étudier la composante du $\Delta(LOD)$ due aux variations du coefficient C_{20} , nous allons procéder de deux manières complémentaires : (i) l'une basée sur la série "observée" $\Delta(LOD)_{C04}$ à laquelle on retire les contributions connues de marées zonales et de la partie *mouvement* des fonctions d'excitation (partie "vent" du moment cinétique atmosphérique axial et partie "courant" du moment cinétique océanique axial) qui est bien modélisée, et (ii) l'autre basée sur la valeur de $\Delta(LOD)$ correspondant au ΔC_{20} provenant des données de géodésie spatiale. Nous comparerons ensuite ces deux résultats afin d'évaluer si les données de variations temporelles du champ de gravité peuvent nous apporter des informations pertinentes sur les variations de la longueur du jour.

9.2 Application

9.2.1 Calcul du $\Delta(LOD)_{matiere}$ à partir des observations de la longueur du jour

L'équation Eq. (3.19) régit le comportement des variations de la longueur du jour en fonction des variations ΔC_{20} et des moments cinétiques relatifs, pour un système où le manteau est découplé du noyau. Cette hypothèse est raisonnable dans le sens où nous nous intéressons dans cette étude à des effets de période minimale semi-annuelle. La partie *mouvement* du $\Delta(LOD)$ s'écrit alors :

$$\Delta(LOD)_{mouvement} = LOD_{référence} \times \frac{h_3}{C_m \Omega} \quad (9.1)$$

Nous utilisons la série temporelle $\Delta(LOD)_{C04}$ décrite précédemment, à laquelle nous devons retirer les modèles et données suivantes (voir Table 9.1), si nous voulons la comparer au $\Delta(LOD)$ correspondant à ΔC_{20} :

- Le modèle pour les variations zonales de $\Delta(LOD)$ (voir IERS Conventions 2003), dues aux déformations de marées terrestres produisant une variation du moment principal d'inertie C et donc une variation de la vitesse de rotation terrestre (voir Fig. 9.1),

- La partie *vent* du moment cinétique atmosphérique axial (i.e. h_3^{Atm} ; voir Eq. (9.1)), qui est proportionnelle à la partie *vent* de la fonction d'excitation effective atmosphérique axiale. Cette dernière est calculée suivant le modèle NCEP/NCAR Reanalysis IB (Salstein & Rosen 1997) sous l'hypothèse du baromètre inverse (voir Fig. 9.2 et Fig. 9.3) :

$$\Delta(LOD)_{vents} = LOD_{référence} \times \chi_3^{eff}_{vents} = LOD_{référence} \times \frac{h_3^{Atm}}{C_m \Omega} \quad (9.2)$$

Nous avons dû filtrer cette série (filtre passe-bande), de manière à supprimer les périodes inférieures à 2 jours, pour pouvoir l'interpoler afin d'obtenir des valeurs avec le même pas en temps que les autres séries de la Table 9.1 que nous utilisons (à savoir un pas de temps de 1 jour).

- La partie *courant* du moment cinétique océanique axial (i.e. h_3^{Ocean} ; voir Eq. (9.1)), qui est proportionnelle à la partie *courant* de la fonction d'excitation effective océanique axiale. Cette dernière est calculée selon le modèle de Gross 2003 (aussi Gross 2004) (voir Fig. 9.2) :

$$\Delta(LOD)_{courants} = LOD_{référence} \times \chi_3^{eff}_{courants} = LOD_{référence} \times \frac{h_3^{Ocean}}{C_m \Omega} \quad (9.3)$$

- Une tendance à long terme, afin d'éliminer les termes décennaux de $\Delta(LOD)_{C04}$, filtrée (filtre passe-bande) de manière à ne garder que les périodes inférieures à 10 ans (voir Fig. 9.4). En effet, les données de ΔC_{20} ne permettent pas de mettre en évidence de tels phénomènes, se produisant à la frontière noyau-manteau (effets électromagnétiques) et sur des échelles de temps assez longues.

TAB. 9.1 – Séries temporelles utilisées dans cette étude.

Type de données	Série	Intervalle de temps		Pas de temps
		(jours juliens modifiés)	(années)	
$\Delta(LOD)$ observé	C04 de l'IERS	37665 - 53164	1962 - 2004	1 jour
Moment cinétique Atmosphérique	Reanalysis IB (Salstein & Rosen 1997) (Kalnay et al. 1996)	32551 - 52729.5	1948 - 2003	6 h
Moment cinétique Océanique	Gross 2003, Gross 2004	44240 - 52364	1980 - 2002	1 jour
Marées zonales	IERS Conventions 2003	37665 - 53164	1962 - 2004	1 jour
Séries de $\Delta\bar{C}_{20}$, \bar{C}_{21} et \bar{S}_{21}	Biancale et al. 2004 Chapitre 7	46194 - 53054	1985-2004	10 jours

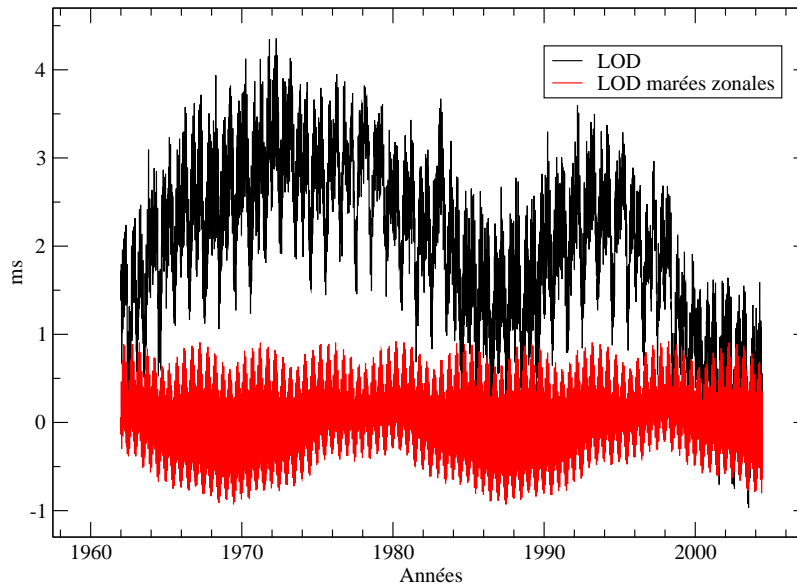


FIG. 9.1 – $\Delta(LOD)_{C04}$ comparée à sa contribution provenant des marées zonales.

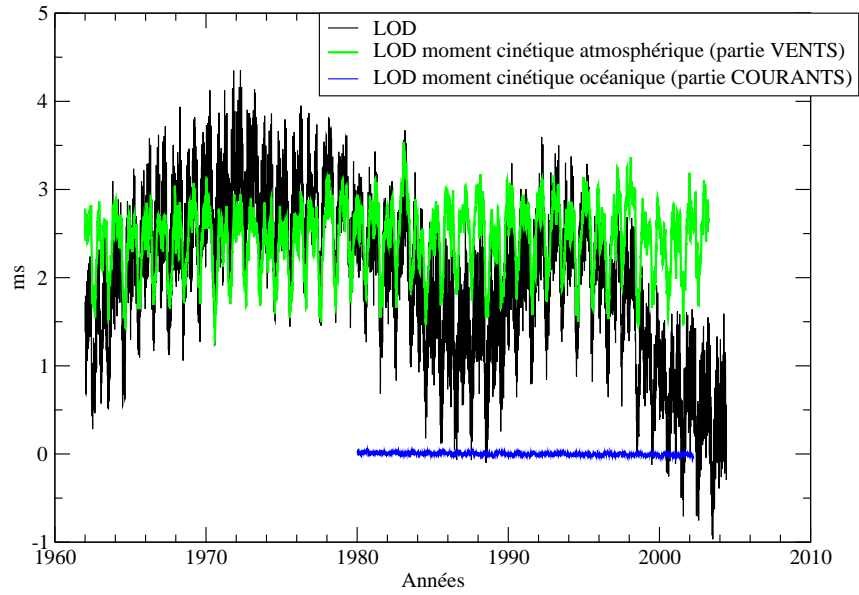


FIG. 9.2 – $\Delta(LOD)_{C04}$ comparée à sa contribution provenant (i) des vents atmosphériques, et (ii) des courants océaniques.

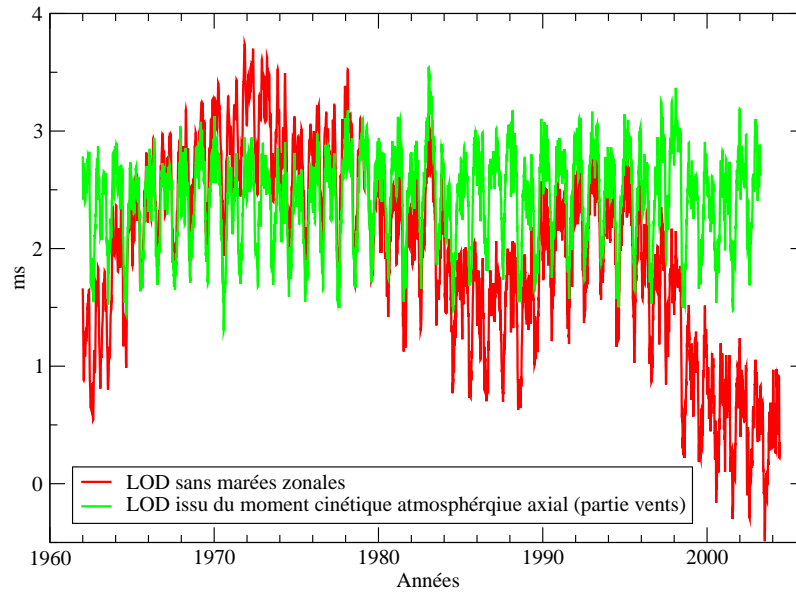


FIG. 9.3 – Comparaison de (i) $\Delta(LOD)_{C04}$ corrigée des marées zonales et de (ii) $\Delta(LOD)$ issu du moment cinétique atmosphérique axial (partie "vent").

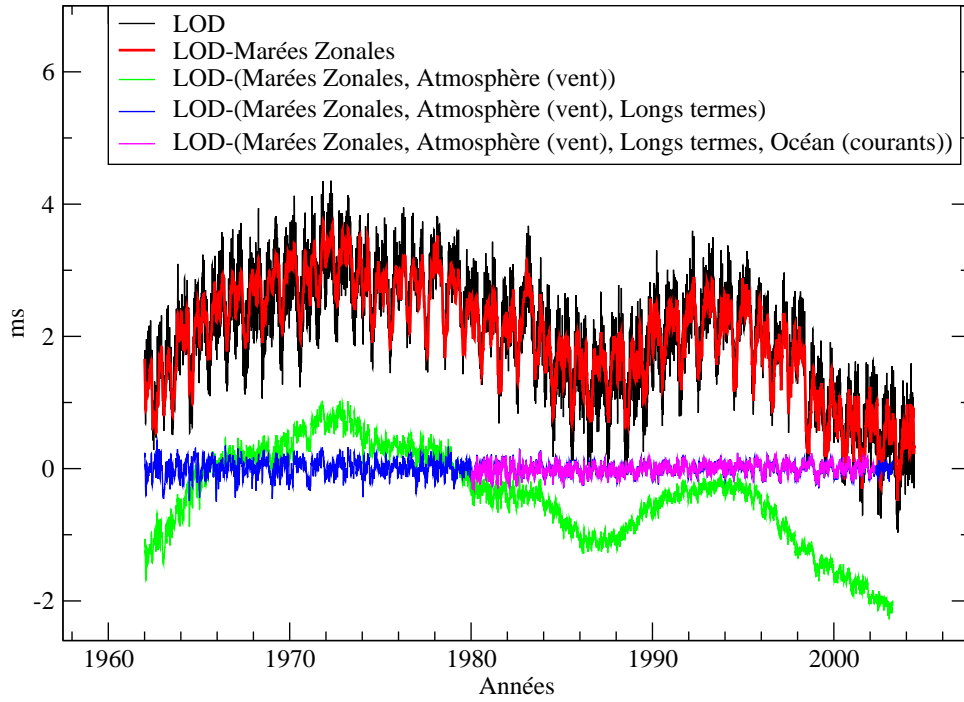


FIG. 9.4 – Différentes contributions aux variations de la longueur du jour. Série $\Delta(LOD)_{astro}$ (en rose) : on a retiré à $\Delta(LOD)_{C04}$ les modèles de (i) marées zonales, (ii) partie "vent" du moment cinétique atmosphérique axial, (iii) tendance à long terme, et (iv) partie "courant" du moment cinétique océanique axial.

Nous obtenons alors le $\Delta(LOD)$ corrigé des effets décrits précédemment : notons-le $\Delta(LOD)_{astro}$ (voir Fig. 9.4). Dans le paragraphe suivant, la série ainsi obtenue sera comparée à la partie *matière* du $\Delta(LOD)$, calculée à partir des données de ΔC_{20} .

9.2.2 Calcul du $\Delta(LOD)_{matiere}$ à partir des variations temporelles du coefficient de Stokes C_{20}

La partie *matière* de $\Delta(LOD)$ peut être calculée grâce aux variations temporelles du coefficient harmonique sphérique \bar{C}_{20} , de la manière suivante (voir Eq. (3.19)) :

$$\Delta(LOD)_{matiere} = -LOD_{référence} \frac{2}{3} \frac{\mathcal{M}}{C_m} \mathcal{R}_e^2 \sqrt{5} \times \left[(1 + k'_2) \Delta \bar{C}_{20}^{Atm, Ocean} + \Delta \bar{C}_{20}^{Autre Origine} \right] \quad (9.4)$$

avec $LOD_{référence} = 86400$ s, $(1 + k'_2) = 0.7$ (Barnes et al. 1983), $C_m = 7.0400 \times 10^{37}$ kg m² (voir Table 1.2), \mathcal{M} et \mathcal{R}_e la masse et le rayon équatorial terrestres, respectivement.

Afin d'exprimer la partie *matière* de $\Delta(LOD)$ grâce aux données de $\Delta \bar{C}_{20}$, nous allons utiliser la série de $\Delta \bar{C}_{20}$ obtenue par le GRGS (Biancale & Lemoine 2004 ; voir Chapitre 7) dont nous avons parlé dans l'introduction. Cette série est composée de différents termes :

(1) Résidus de l'ajustement du modèle de champ de gravité EIGEN-GRACE avec des données issues des mesures de télémétrie laser sur les satellites Lageos I et II (entre 1985 et 2004) ; série notée $\Delta \bar{C}_{20}^{Autre Origine}$ (voir Fig. 7.15(b), §7.3.1),

(2) Modèle de variations temporelles de \bar{C}_{20} dues à la pression atmosphérique (issu des données ECMWF), tenant compte des effets de surcharge atmosphérique sur la croûte terrestre (voir Fig. 7.6, §7.2.1),

(3) Modèle de variations temporelles de \bar{C}_{20} dues aux marées terrestres solides (IERS Conventions 1996) (voir Fig. 7.8, §7.2.2), et

(4) Modèle de variations temporelles de \bar{C}_{20} dues aux marées océanique (IERS Conventions 1996), tenant compte des effets de surcharge océanique sur la croûte terrestre (voir Fig. 7.9, §7.2.3).

Les modèles décrits plus haut ont été supposés lors de l'ajustement d'orbite des satellites artificiels permettant de déterminer le champ de gravité terrestre. Nous pouvons donc noter que si nous rajoutons à la série des observations de $\Delta \bar{C}_{20}$ (données (1)) les séries dues à la pression atmosphérique (modèle (2)), et aux marées terrestres solides et océaniques (modèles (3) et (4), respectivement), nous obtenons les variations totales du coefficient \bar{C}_{20} , réellement observées par les satellites (voir Fig. 7.10 ; série notée par la suite $\Delta \bar{C}_{20}^{Total}$). Cette série comprend donc naturellement les effets de surcharge des couches atmosphérique et océanique sur la croûte terrestre. Nous utiliserons donc l'équation suivante :

$$\Delta(LOD)_{matiere} = -LOD_{référence} \frac{2}{3} \frac{\mathcal{M}}{C_m} \mathcal{R}_e^2 \sqrt{5} \Delta \bar{C}_{20}^{Total} \quad (9.5)$$

étant donné que les effets de surcharge sont déjà compris dans les coefficients \bar{C}_{20}^{Atm} et \bar{C}_{20}^{Ocean} .

Pour comparer la série de $\Delta(LOD)$ correspondant aux variations temporelles de \bar{C}_{20} (voir Eq. (9.5)) avec la série $\Delta(LOD)_{astro}$, nous devons lui retirer (i) les effets des marées zonales (modèle IERS Conventions 2003), ainsi que (ii) les effets à long terme (filtre passe-bande). Nous obtenons alors la série que nous notons : $\Delta(LOD)_{geod}$.

TAB. 9.2 – Rappel des définitions des séries $\Delta(LOD)_{astro}$ et $\Delta(LOD)_{geod}$, puis ensuite de $\Delta(LOD)_{residus}$.

	<i>Série initiale</i>	<i>Effets retirés</i>
$\Delta(LOD)_{astro}$	$\Delta(LOD)_{C04}$	Marées zonales (IERS Conventions 2003) Partie <i>vents</i> du moment cinétique axial atmosphérique Partie <i>courants</i> du moment cinétique axial océanique Tendance à long terme (périodes supérieures à 10 ans)
$\Delta(LOD)_{geod}$	$\Delta\bar{C}_{20}^{Total}$ (données (1) + modèles (2), (3) et (4))	Marées zonales (IERS Conventions 2003) Tendance à long terme (périodes supérieures à 10 ans)
$\Delta(LOD)_{residus}$	$\Delta C_{20}^{Autre Origine}$ (données (1))	Tendance à long terme (périodes supérieures à 10 ans)

9.2.3 Comparaison des deux approches

Tout d’abord, comparons les signaux à long terme du $\Delta(LOD)$ calculé avec chacune des deux approches précédentes (voir Fig. 9.5), signaux que nous retirons par la suite pour la comparaison des deux séries (comme nous l’avons décrit précédemment). Nous pouvons constater que les amplitudes de ces effets ne sont pas comparables. L’effet à long terme de la courbe noire est imputé aux effets électromagnétiques à la frontière noyau-manteau.

Dans la Figure 9.6, nous comparons les séries $\Delta(LOD)_{astro}$ et $\Delta(LOD)_{geod}$ décrites précédemment. Notons que $\Delta(LOD)_{astro}$ a été filtrée (filtre passe-bande) de manière à supprimer les périodes inférieures à 20 jours, pour pouvoir l’interpoler afin d’obtenir des valeurs avec le même pas en temps que la série issue des données de $\Delta\bar{C}_{20}$ (à savoir un pas de temps de 10 jours).

Les différences subsistant entre ces deux séries peuvent être en partie dues au fait que (i) les données ayant été utilisées précédemment (que ce soit pour les parties *mouvement* des moments cinétiques axiaux atmosphérique et océanique, ou pour les données de $\Delta\bar{C}_{20}$) sont entachées d’erreur, et (ii) les modèles implémentés (pour les marées zonales ou bien les contributions atmosphérique et océanique de $\Delta\bar{C}_{20}$) ne sont pas parfaits. Mais ceci peut aussi être dû d’autre part à la partie *mouvement* des effets hydrologiques (comprise dans $\Delta(LOD)_{astro}$ mais pas dans $\Delta(LOD)_{geod}$) dont nous n’avons pas tenu compte dans cette étude (car il n’y a pas de modèle standard actuellement).

La corrélation entre ces deux séries est égale à 0.58. Nous avons tracé les spectres de chacune de ces deux séries, afin d’identifier les signaux présents dans le $\Delta(LOD)$ calculé de ces deux manières. Les périodes annuelle et semi-annuelle sont mises en évidence (voir Fig. 9.7). Nous pouvons alors constater un très bon accord entre les signaux annuels d’une part, et les signaux semi-annuels d’autre part, dans ces deux séries.

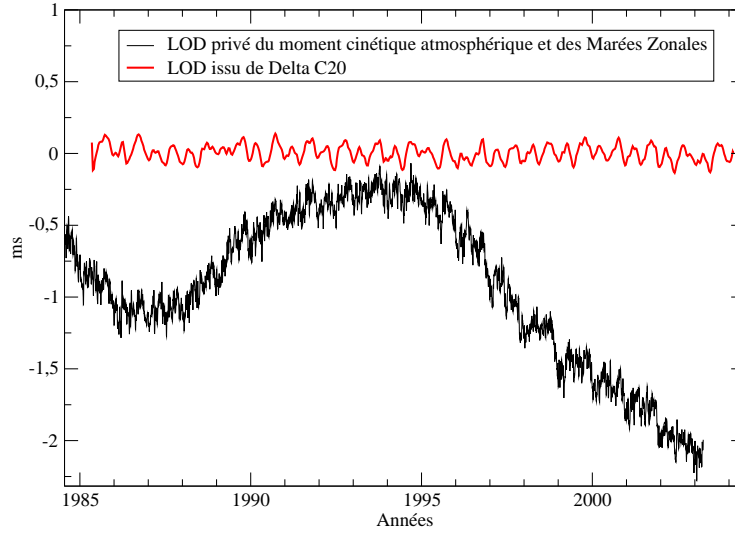


FIG. 9.5 – Comparaison de (i) $\Delta(LOD)_{C04}$ privé des marées zonales ainsi que des effets du moment cinétique atmosphérique axial (partie "vent"), avec (ii) $\Delta(LOD)$ issu du calcul à partir de $\Delta\bar{C}_{20}^{Total}$ (Eq. (9.5)), également privé des effets des marées zonales.

Nous avons ajusté des modèles périodiques (annuel et semi-annuel) dans ces deux séries (voir Table 9.3, puis Fig. 9.8(a) et Fig. 9.9(a)), de la manière suivante : $A \cos(\omega t + \phi)$, où A est l'amplitude du signal en ms, ω sa fréquence ($\omega = 2\pi/T$, où T est la période en années), et ϕ sa phase. Nous les avons ensuite soustrait afin d'éliminer les termes saisonniers dans nos deux séries (voir Fig. 9.8(b) et Fig. 9.9(b)). Ainsi, nous pouvons comparer ces deux séries où les termes saisonniers (estimés) ont été retirés (voir Fig. 9.10(a)), puis tracer leurs spectres de Fourier. **Leur corrélation est dorénavant égale à 0.62.** La figure 9.10(b) nous montre alors que les signaux restant peuvent être considérés dans le bruit.

TAB. 9.3 – Modèles saisonniers ajustés dans les séries $\Delta(LOD)_{astro}$ et $\Delta(LOD)_{geod}$, puis ensuite $\Delta(LOD)_{residus}$.

Période	$\Delta(LOD)_{astro}$		$\Delta(LOD)_{geod}$		$\Delta(LOD)_{residus}$	
	Amplitude ms	Phase	Amplitude ms	Phase	Amplitude ms	Phase
annuelle	0.034	235°.25	0.035	279°.23	0.033	240°.01
semi-annuelle	0.049	211°.98	0.056	154°.58	0.026	148°.08

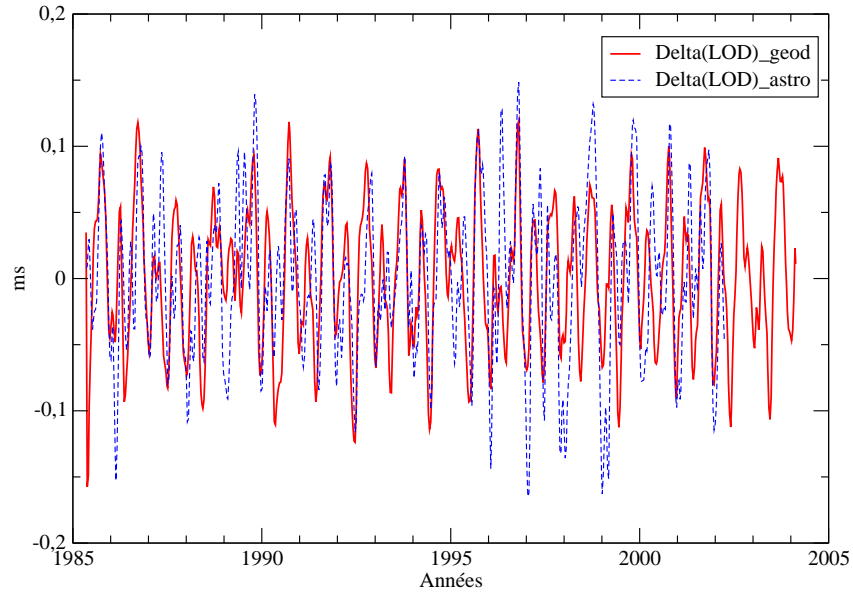


FIG. 9.6 – Comparaison de $\Delta(LOD)_{astro}$ et $\Delta(LOD)_{geod}$.

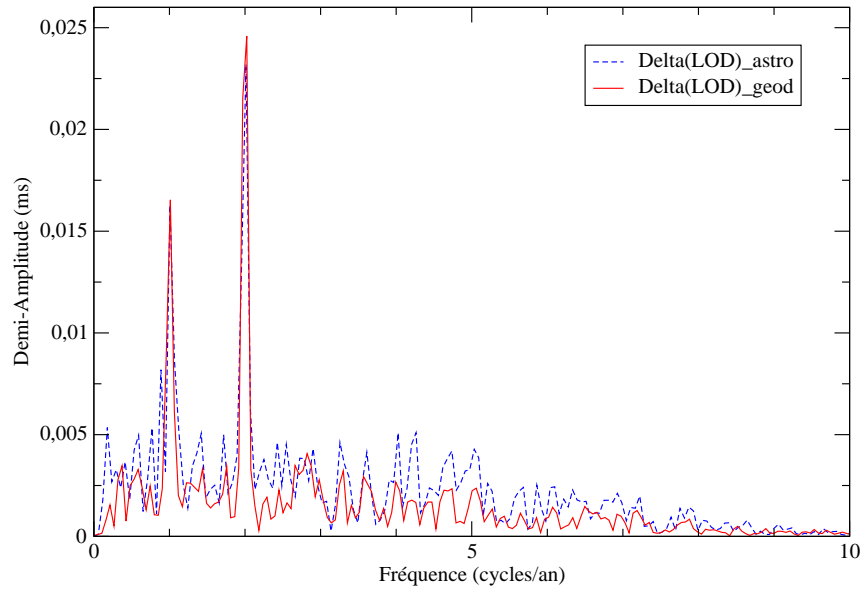
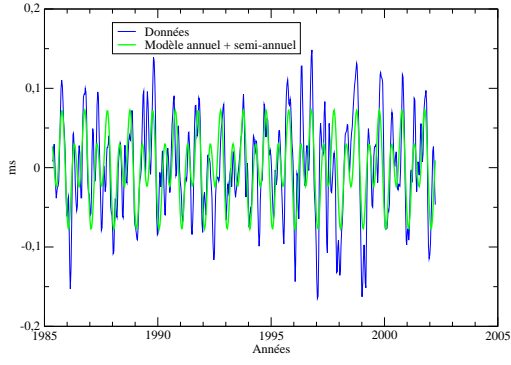
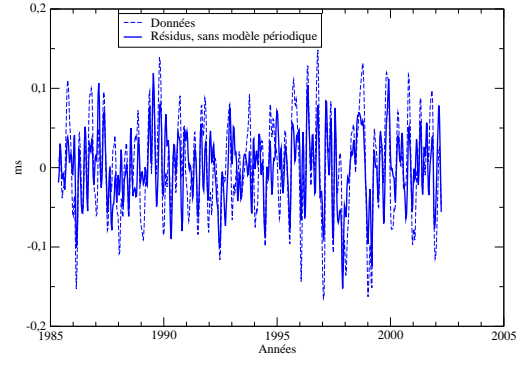


FIG. 9.7 – Comparaison des spectres de Fourier de $\Delta(LOD)_{astro}$ et $\Delta(LOD)_{geod}$.

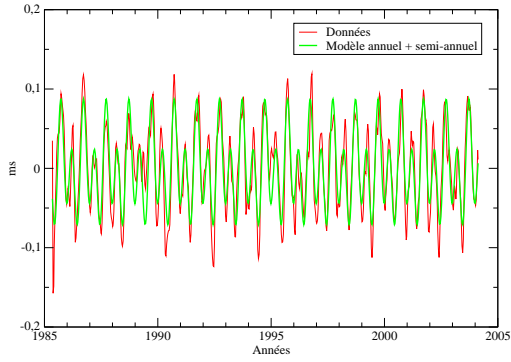


(a) Comparaison de $\Delta(LOD)_{astro}$ au modèle.

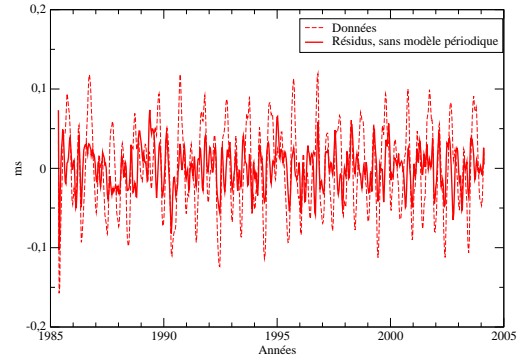


(b) On soustrait le modèle périodique à $\Delta(LOD)_{astro}$.

FIG. 9.8 – Données de $\Delta(LOD)_{astro}$ comparées à un modèle périodique (termes annuel et semi-annuel) ajusté, que l'on soustrait.

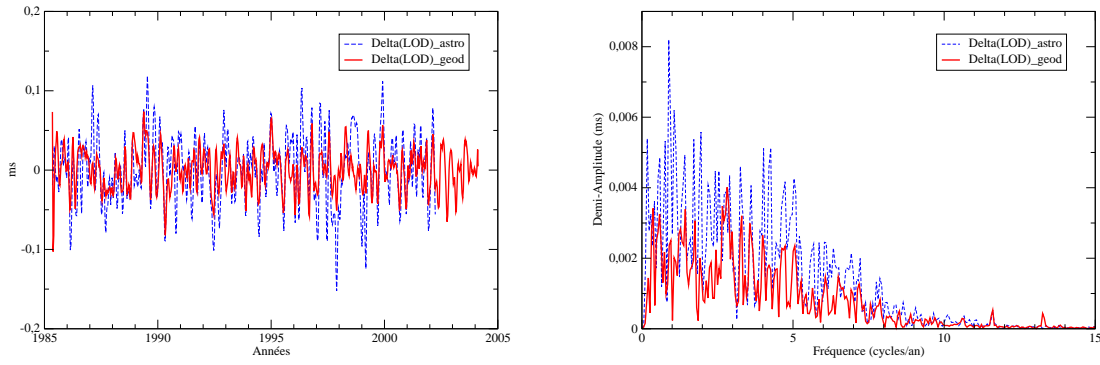


(a) Comparaison de $\Delta(LOD)_{geod}$ au modèle.



(b) On soustrait le modèle périodique à $\Delta(LOD)_{geod}$.

FIG. 9.9 – Données de $\Delta(LOD)_{geod}$ comparées à un modèle périodique (termes annuel et semi-annuel) ajusté, que l'on soustrait.



(a) Comparaison de $\Delta(LOD)_{astro}$ et $\Delta(LOD)_{geod}$ auxquels on a soustrait les termes saisonniers (modèles).

(b) Spectres de Fourier des termes non-saisonniers de $\Delta(LOD)_{astro}$ et $\Delta(LOD)_{geod}$.

FIG. 9.10 – Termes non-saisonniers de $\Delta(LOD)_{astro}$ et $\Delta(LOD)_{geod}$.

9.2.4 Informations géophysiques apportées par la série temporelle C_{20}

Sur la base de l'équation (3.18) et toujours sous l'hypothèse que la trace du tenseur d'inertie est invariante dans le temps, nous écrivons :

$$c_{33}^{Autre\ Origine}(t) = -\frac{2}{3} \mathcal{M} \mathcal{R}_e^2 \Delta C_{20}^{Autre\ Origine}(t) \quad (9.6)$$

en supposant que cet incrément d'inertie est dû aux phénomènes autres que la pression atmosphérique et les marées océaniques ou solides. Cependant, ceci ne s'écrit que dans la limite de précision des modèles implémentés pour la détermination de $\Delta C_{20}^{Autre\ Origine}$ (modèles (2), (3) et (4) décrits au paragraphe précédent, dont les erreurs éventuelles entachent les valeurs de $\Delta C_{20}^{Autre\ Origine}$).

Comme nous disposons des modèles de variations temporelles de C_{20} dues aux variations de pression atmosphérique, ainsi qu'aux marées océaniques et solides, nous pouvons alors déterminer $c_{33}^{Autre\ Origine}$ (voir Fig. 9.11).

D'après l'équation (9.5), nous pouvons déterminer le $\Delta(LOD)$ dû à ces variations temporelles de C_{20} a priori autres que celles de la pression atmosphérique et des marées océaniques et solides. Comme précédemment, il est filtré afin d'éliminer les tendances et périodes supérieures à 10 ans. La série ainsi obtenue est notée : $\Delta(LOD)_{residus}$ (voir Table 9.2).

Dans la figure 9.12 on le compare à $\Delta(LOD)_{geod}$ et il est comparé à $\Delta(LOD)_{astro}$ dans la figure 9.13 : **leur corrélation est égale à 0.59**. Nous traçons ensuite son spectre de Fourier (voir Fig. 9.14) et des termes saisonniers sont mis en évidence, dont l'amplitude est 33 μs pour le terme annuel et 26 μs pour le semi-annuel (voir Table 9.3).

Sous l'hypothèse que l'affirmation de l'invariance de la trace du tenseur d'inertie dans le temps est juste, cette série $\Delta(LOD)_{residus}$ nous donne des informations sur des sources géophysiques qui contribueraient aux variations de la longueur du jour. Il faudra comparer cette série à des modèles géophysiques d'hydrologie et de variations des eaux continentales.

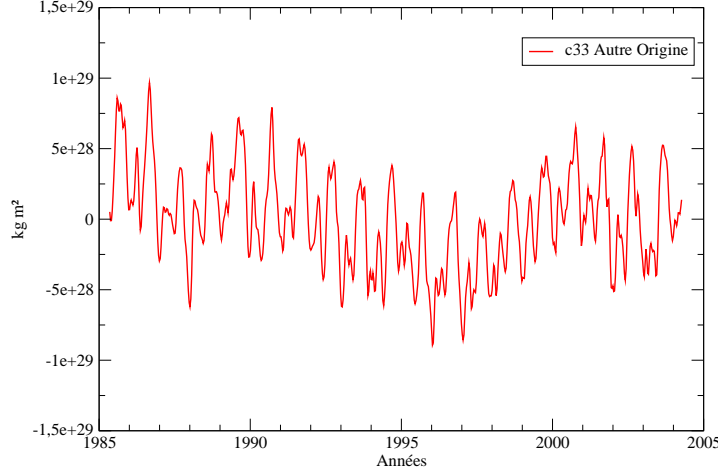


FIG. 9.11 – Série de l'incrément d'inertie $c_{33}^{Autre Origine}$ due aux autres phénomènes géophysiques de redistributions de masses que la pression atmosphérique et les marées océaniques ou solides.

9.3 Conclusion

Dans ce Chapitre, nous avons reconstitué les variations de la longueur du jour correspondant à la série temporelle du coefficient harmonique sphérique \bar{C}_{20} de degré 2 et d'ordre 0 du potentiel gravitationnel terrestre (GRGS, Biancale & Lemoine 2004). Ce coefficient C_{20} correspond en effet à la partie *matière* de $\Delta(LOD)$, provenant des redistributions de masses de la Terre entière et non pas du manteau seul. Le but était de valider cette série temporelle de C_{20} grâce aux données de variation de longueur du jour. Les effets de surcharge dûs aux couches atmosphérique et océanique sur la croûte terrestre sont directement pris en compte dans la série de $\Delta\bar{C}_{20}^{Total}$. Nous avons de plus supposé que $\Delta Tr(I)$ était nulle, autrement dit que la somme des éléments diagonaux du tenseur d'inertie ne variait pas dans le temps, afin de pouvoir nous baser sur l'équation (9.5). Cette hypothèse nous a semblé raisonnable dans la mesure où le système considéré est global (i.e. système {Terre-Atmosphère-Océans-Hydrosphère}), c'est-à-dire dans la mesure où il n'y a pas de perte de masse de notre système.

Nous avons comparé les parties *matière* de $\Delta(LOD)$ obtenues de deux manières indépendantes : (i) issues des mesures de la longueur du jour ($\Delta(LOD)_{C04}$) et des moments

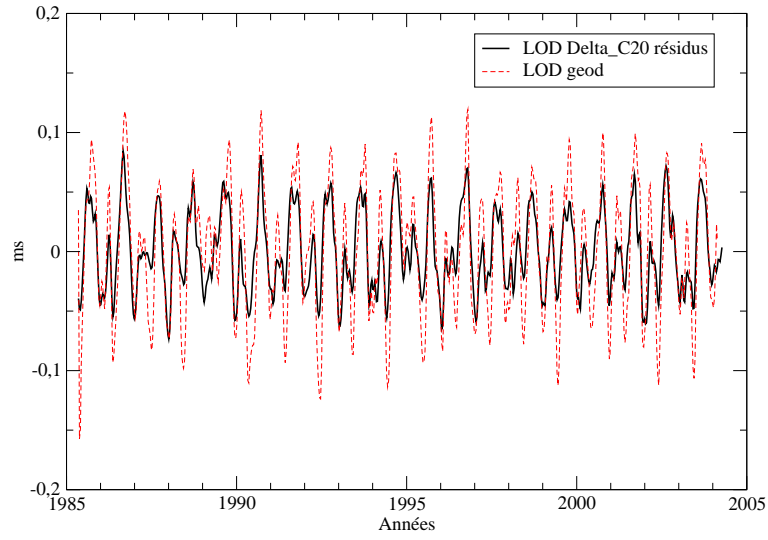


FIG. 9.12 – Comparaison des séries $\Delta(LOD)_{geod}$ et $\Delta(LOD)_{residus}$.

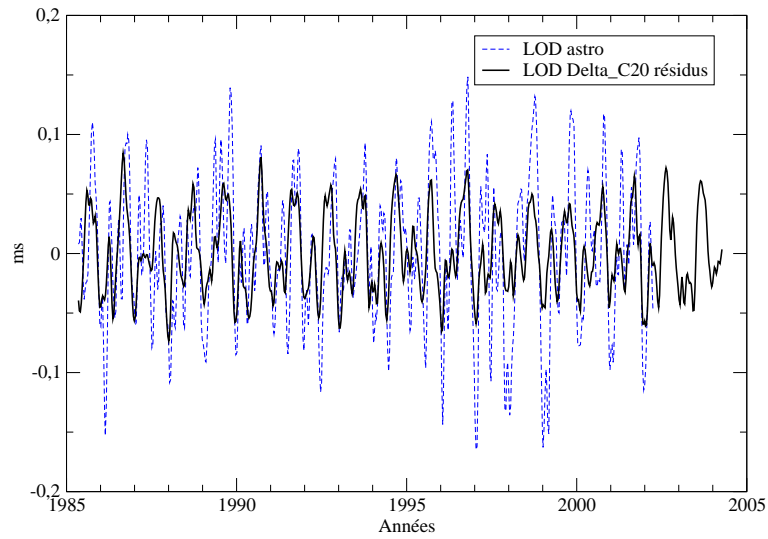


FIG. 9.13 – Comparaison des séries $\Delta(LOD)_{astro}$ et $\Delta(LOD)_{residus}$.

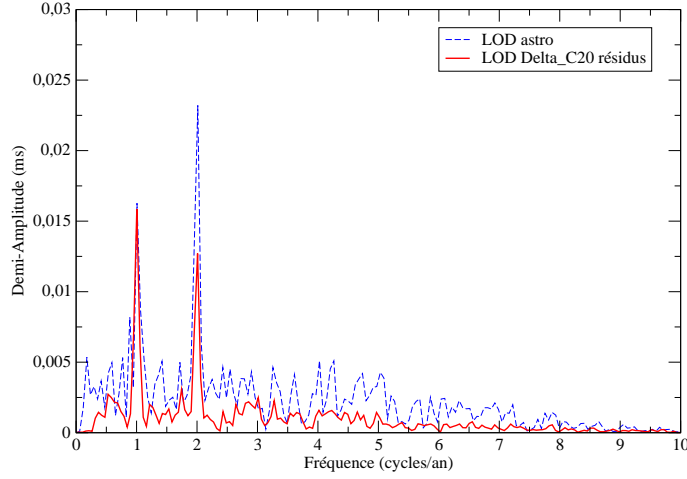


FIG. 9.14 – Comparaison des spectres de fourier des séries $\Delta(LOD)_{astro}$ et $\Delta(LOD)_{residus}$.

cinétiques atmosphérique et océanique axiaux (parties *mouvement*) (série $\Delta(LOD)_{astro}$), et (ii) issues des données de $\Delta\bar{C}_{20}$ (série $\Delta(LOD)_{geod}$). Ceci nous permet de mettre en évidence une assez bonne corrélation (égale à 0.58) entre ces deux séries, possédant toutes deux des termes saisonniers. Les données de $\Delta\bar{C}_{20}$ permettent de mettre en évidence un terme semi-annuel (annuel, respectivement) d'amplitude $\simeq 56 \mu s$ ($\simeq 35 \mu s$, respectivement) dans le $\Delta(LOD)_{matiere}$, dans la limite de leur précision (une erreur de l'ordre de 10^{-11} faite sur $\Delta\bar{C}_{20}$ entraîne une erreur de l'ordre de $10 \mu s$ sur $\Delta(LOD)$). Ceci tendrait à montrer que les données de ΔC_{20} peuvent permettre de déterminer la partie *matière* des variations de la longueur du jour à $10 \mu s$ près.

En corrigeant ces effets saisonniers, les séries ont une corrélation de 0.64, mais l'amplitude des signaux de $\Delta(LOD)_{geod}$ ne dépasse pas $8 \mu s$, ce qui n'est pas assez suffisant pour être significatif au regard de la précision des données de $\Delta(LOD)$ (de l'ordre de $10 \mu s$).

Les données de $\Delta\bar{C}_{20}$ peuvent nous permettre de déterminer les incréments d'inertie $c_{33}^{Autre Origine}$ dûs à $\Delta\bar{C}_{20}^{Autre Origine}$ (sous l'hypothèse $\Delta Tr(I) = 0$), que l'on impute donc aux effets géophysiques de redistributions de masses autres que la pression atmosphérique ou les marées océaniques et solides. Il est alors compris entre $-5 \times 10^{28} \text{ kg m}^2$ et $5 \times 10^{28} \text{ kg m}^2$. Il peut être transcrit en variations de longueur du jour et nous donne alors des informations sur les contributions géophysiques telles l'hydrologie ou encore les tremblements de terre à ces variations. Il comporte un terme annuel de $33 \mu s$ d'amplitude (respectivement un terme semi-annuel d'amplitude $26 \mu s$). Dans l'avenir, il faudrait le comparer à des modèles géophysiques d'hydrologie.

Il s'agit d'une étude préliminaire, l'une des premières à utiliser des données de $\Delta\bar{C}_{20}$, qui mérite d'être poursuivie. Ceci n'était encore pas envisageable dans un passé récent et dans l'avenir, une augmentation et une meilleure précision des données de champ de gravité variable permettra de raffiner de tels travaux.

Chapitre 10

Mouvement du pôle

10.1 Introduction

Dans le chapitre 3, nous avons donné les équations reliant le mouvement équatorial p du pôle (CIP) dans le repère terrestre aux coefficients harmoniques sphériques \bar{C}_{21} et \bar{S}_{21} du potentiel de gravité. Le but de ce travail est de comparer l'excitation du mouvement du pôle observée avec celle calculée à partir des séries temporelles de \bar{C}_{21} et \bar{S}_{21} , données relatives aux redistributions de masses de la Terre globale.

Nous utilisons d'une part la série d'excitation géodésique du mouvement du pôle basée sur les valeurs IERS (série C04) des coordonnées x_p et y_p du pôle (excitation notée χ_G). Nous utilisons d'autre part les séries temporelles des coefficients harmoniques sphériques \bar{C}_{21} et \bar{S}_{21} décrites au chapitre 7 (§7.3, Fig. 7.16(a)), et obtenues lors de la redétermination du champ de gravité basée sur les équations normales des satellites Lageos I et II (Biancale & Lemoine 2004), couvrant la période de 1985 à 2004.

Notons que ces coefficients harmoniques sphériques ne contribuent qu'à la partie *matière* du mouvement du pôle et non à sa partie *mouvement*, qu'il nous faudra donc retirer des données d'excitation du mouvement du pôle (χ_G), afin de les comparer au mouvement du pôle correspondant à \bar{C}_{21} et \bar{S}_{21} . De la même manière que pour la longueur du jour dans le chapitre précédent, la partie *mouvement* de l'excitation du mouvement du pôle est bien modélisée et issue des mêmes modèles de moments cinétiques atmosphérique et océanique. Cependant, contrairement à précédemment, elle n'est pas prépondérante dans l'excitation géodésique du mouvement du pôle, qui devrait donc être assez proche de l'excitation correspondant à \bar{C}_{21} et \bar{S}_{21} .

A l'instar du Chapitre 9, afin d'étudier la composante de l'excitation du mouvement du pôle due aux variations des coefficients \bar{C}_{21} et \bar{S}_{21} , nous allons procéder de deux manières complémentaires : (i) l'une basée sur les valeurs de l'excitation géodésique χ_G du mouvement du pôle à laquelle on retire les parties *mouvement* des excitations géophysiques des couches fluides (atmosphère et océans), et (ii) l'autre basée sur l'excitation du mouvement du pôle correspondant aux coefficients harmoniques sphériques \bar{C}_{21} et \bar{S}_{21} , provenant de la géodésie spatiale. Nous comparerons ensuite les résultats obtenus afin d'étudier la pertinence des données du champ de gravité et de ses variations pour l'étude du mouvement du pôle.

10.2 Application

10.2.1 Calcul de $\chi_{matiere}$ à partir de l'excitation géodésique du mouvement du pôle

Le mouvement p du pôle (CIP) dans la Terre est régi par l'équation (3.20), qui peut s'écrire aussi :

$$\begin{aligned} p + \frac{i}{\sigma_0} \dot{p} &= \chi^{mvt} + \chi^{matiere} \\ \Leftrightarrow \chi_G &= \chi^v + \chi^c + \chi^{matiere} \end{aligned} \quad (10.1)$$

où σ_0 est la pulsation de Chandler. Le membre de gauche constitue l'excitation géodésique équatoriale du mouvement du pôle et s'écrit χ_G (voir Fig. 10.1). Son calcul est issu (i) des données IERS (série C04) des coordonnées x_p et y_p du mouvement du pôle $p = x_p - i y_p$, (ii) de calculs numériques afin d'en déduire les dérivées temporelles \dot{x}_p et \dot{y}_p (méthode d'Euler), et (iii) du choix d'une pulsation de Chandler, prise ici égale à 0.8435 cycles par an (soit une période de 433 jours avec un facteur de qualité pris égal à 179, selon Wilson & Vicente 1990).

Le membre de droite de l'équation (10.1) est composé d'une partie *mouvement* correspondant à l'excitation équatoriale des couches fluides (atmosphère et océan) et notée χ^{mvt} (χ^v est la partie *vents* de l'excitation atmosphérique équatoriale, et χ^c est la partie *courants* de l'excitation océanique équatoriale) :

$$\begin{aligned} \chi^{mvt}_{atm} &= \chi^v = \frac{k_0}{k_0 - k_2} \frac{h^{atm}}{\Omega (C_m - A_m)} \\ \chi^{mvt}_{ocean} &= \chi^c = \frac{k_0}{k_0 - k_2} \frac{h^{ocean}}{\Omega (C_m - A_m)} \end{aligned} \quad (10.2)$$

où $k_0/(k_0 - k_2) = 1.43$ (Barnes et al. 1983). Il est aussi composé d'une partie *matière* correspondant aux coefficients harmoniques sphériques. Afin de comparer le mouvement du pôle issu des données IERS de x_p et y_p (i.e. χ_G) à celui issu de ces coefficients harmoniques sphériques, nous devons retirer à χ_G la partie *mouvement* de l'excitation géophysique équatoriale des couches fluides (voir Fig. 10.2). Nous utilisons pour cela le modèle NCEP/NCAR Reanalysis IB (Salstein & Rosen 1997) basé sur l'hypothèse du baromètre inverse pour le calcul de l'excitation équatoriale atmosphérique, et le modèle de Gross 2003 (aussi Gross 2004) pour le calcul de l'excitation équatoriale océanique.

Afin de comparer l'excitation du mouvement du pôle issue de χ_G avec celle correspondant aux coefficients harmoniques sphériques \bar{C}_{21} et \bar{S}_{21} , nous filtrons (filtre passe-bande, de manière à éliminer toutes les périodes inférieures à 20 jours) et interpolons (interpolation tous les 10 jours) ces séries (voir Fig. 10.3).

Les deux contributions des couches fluides retirées à χ_G , nous obtenons la série : χ_{astro} (voir Fig. 10.4), que nous pouvons comparer à la partie *matière* du moment cinétique atmosphérique qui contribue pour beaucoup à l'excitation du mouvement du pôle (voir Fig. 10.5).

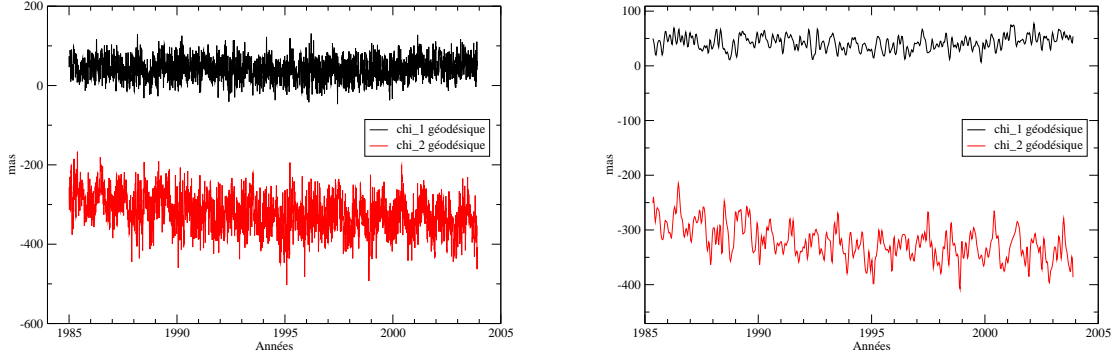


FIG. 10.1 – Composantes équatoriales (à gauche brutes et à droite filtrées) de l'excitation géodésique χ_G du mouvement du pôle.

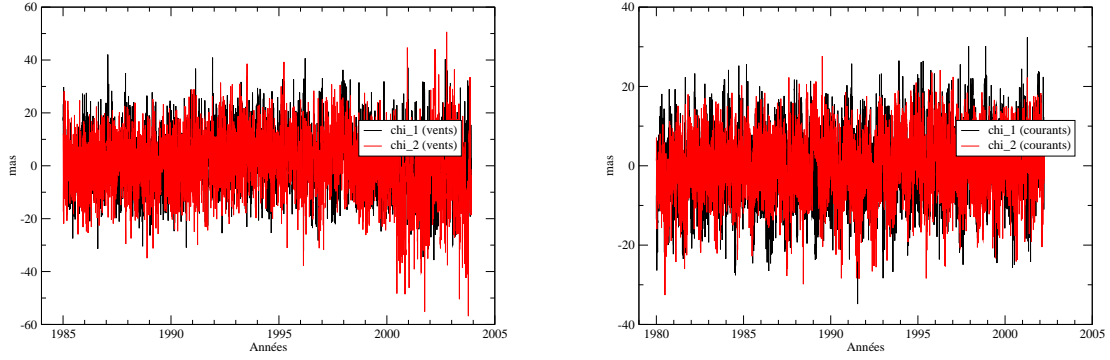


FIG. 10.2 – Composantes équatoriales (χ_1 , χ_2) de l'excitation géophysique des couches fluides (atmosphère à gauche, et océans à droite : parties *mouvement*).

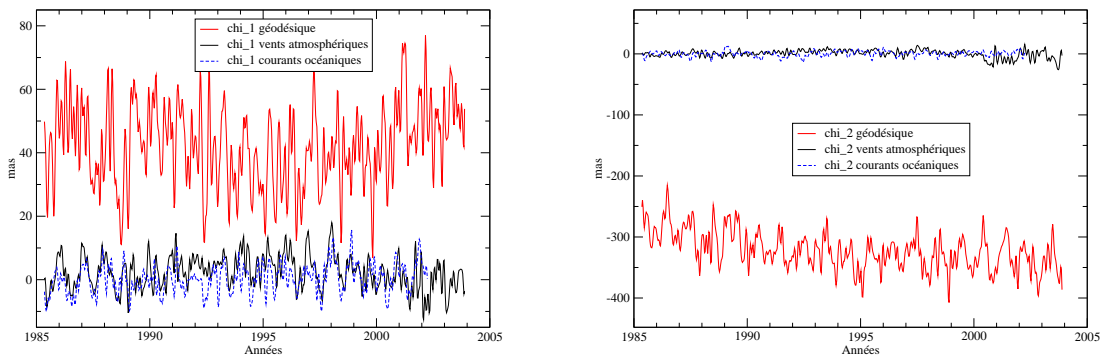


FIG. 10.3 – Composantes équatoriales filtrées et interpolées (χ_1 , χ_2) de l'excitation géodésique χ_G , et géophysique (i.e. des couches fluides atmosphère et océans : parties *mouvement*).

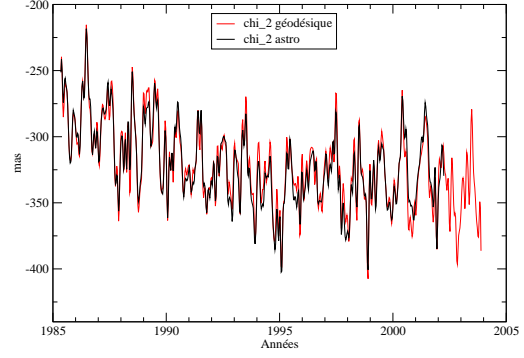
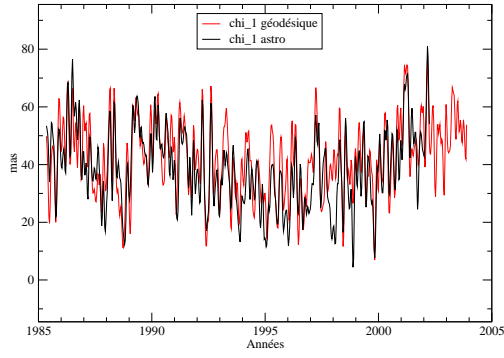


FIG. 10.4 – Comparaison des composantes équatoriale (χ_1, χ_2) de (i) l'excitation géodésique χ_G , et (ii) χ_{astro} .

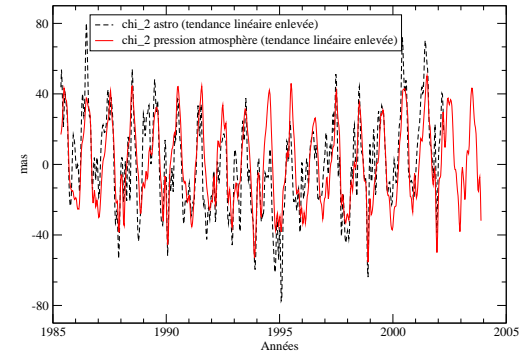
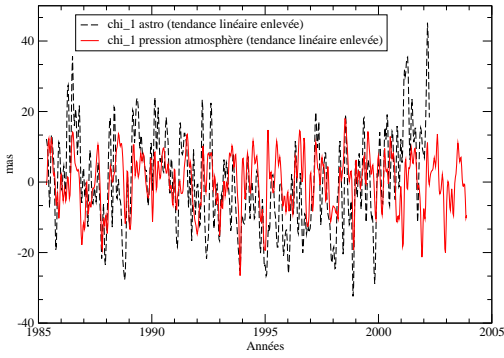


FIG. 10.5 – Comparaison de χ_{astro} et de l'excitation atmosphérique partie *matière* (données moment cinétique atmosphérique).

10.2.2 Calcul de $\chi_{matiere}$ à partir des coefficients de gravité \bar{C}_{21} et \bar{S}_{21}

La partie *matière* de l'excitation du mouvement du pôle peut être calculée grâce aux coefficients harmoniques sphériques \bar{C}_{21} et \bar{S}_{21} (voir Eq. (3.20)), de la manière suivante :

$$\chi^{matiere} = -\sqrt{\frac{5}{3}} \frac{k_0}{k_0 - k_2} \frac{\mathcal{M} \mathcal{R}_e^2}{C_m - A_m} \times \quad (10.3)$$

$$[(1 + k'_2) (\bar{C}_{21} + i \bar{S}_{21})^{Atm, Ocean} + (\bar{C}_{21} + i \bar{S}_{21})^{Autre Origine}]$$

où $k_0/(k_0 - k_2) = 1.43$ et $(1 + k'_2) k_0/(k_0 - k_2) = 1$ (Barnes et al. 1983), $C_m = 7.0400 \times 10^{37}$ kg m² et $A_m = 7.0165 \times 10^{37}$ kg m² (voir Table 1.2), \mathcal{M} et \mathcal{R}_e sont la masse et le rayon équatorial terrestres, respectivement.

Nous allons exprimer la partie *matière* de l'excitation du mouvement du pôle grâce aux données de \bar{C}_{21} et \bar{S}_{21} dues a priori aux effets géophysiques autres que la variation de pression atmosphérique et les marées océaniques et solides. Nous allons utiliser pour cela les séries déterminées par le GRGS (Biancale & Lemoine 2004 ; voir chapitre 7) dont nous avons parlé dans l'introduction, qui sont obtenues en supposant les modèles suivants (elles sont notées $\Delta C_{21}^{Autre Origine}$ et $\Delta S_{21}^{Autre Origine}$) :

- Modèle de variations temporelles de \bar{C}_{21} et \bar{S}_{21} dues à la pression atmosphérique (issu des données ECMWF), tenant compte des effets de surcharge atmosphérique sur la croûte terrestre (voir Fig. 7.11, Fig. 7.12, §7.2.1),
- Modèle de variations temporelles de \bar{C}_{21} et \bar{S}_{21} dues aux marées terrestres solides (IERS Conventions 1996) (voir Fig. 7.11, Fig. 7.12, §7.2.2),
- Modèle de correction de \bar{C}_{21} et \bar{S}_{21} dûs à la marée polaire (IERS Conventions 1996), puis enfin
- Modèle de variations temporelles de \bar{C}_{21} et \bar{S}_{21} dues aux marées océanique (IERS Conventions 1996), tenant compte des effets de surcharge océanique sur la croûte terrestre (voir Fig. 7.11, Fig. 7.12, §7.2.3).

Les termes $\Delta C_{21}^{Autre Origine}$ et $\Delta S_{21}^{Autre Origine}$ sont obtenus lors de l'ajustement d'orbite des satellites artificiels, et contiennent donc déjà les effets de surcharge au cas où il y en aurait. Par conséquent, afin d'évaluer l'effet de ces variations géophysiques du champ de gravité sur l'excitation du mouvement du pôle, nous nous baserons sur l'équation suivante :

$$\chi^{matiere} = -\sqrt{\frac{5}{3}} \frac{k_0}{k_0 - k_2} \frac{\mathcal{M} \mathcal{R}_e^2}{C_m - A_m} (\bar{C}_{21} + i \bar{S}_{21}) \quad (10.4)$$

Le but est alors de comparer la série χ_{astro} obtenue précédemment à la partie *matière* de l'excitation du mouvement du pôle correspondant aux coefficients harmoniques sphériques $\Delta C_{21}^{Autre Origine}$ et $\Delta S_{21}^{Autre Origine}$, obtenue grâce à l'équation (10.4). Notons cette dernière série : χ_{gravi} (voir Fig. 10.6).

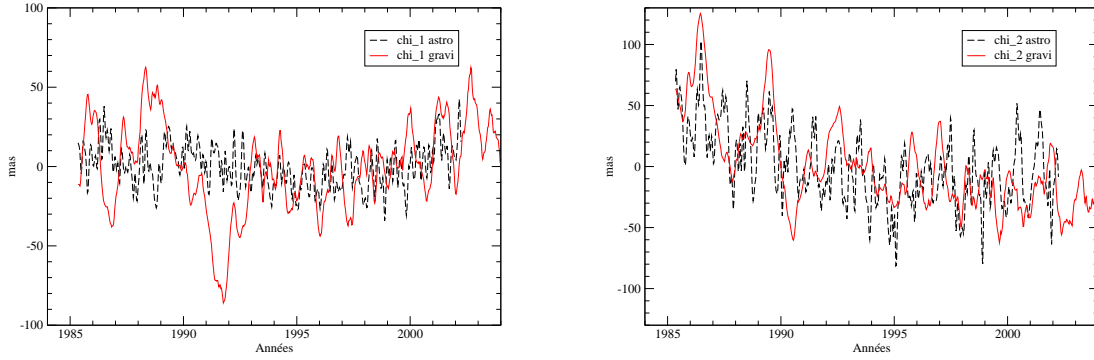


FIG. 10.6 – Comparaison de χ_{astro} avec χ_{gravi} issu de \bar{C}_{21} et \bar{S}_{21} résiduels observés (i.e. sans les modèles) : parties variables.

10.3 Discussion

Dans ce chapitre, nous avons reconstitué l'excitation du mouvement du pôle correspondant à la série temporelle des coefficients de Stokes $\Delta\bar{C}_{21}$ et $\Delta\bar{S}_{21}$ de degré 2 et d'ordre 1 du potentiel gravitationnel terrestre (GRGS, Biancale & Lemoine 2004), limités aux effets géophysiques autres que les variations de pression atmosphérique et que les marées océaniques et solides. Ces coefficients $\Delta\bar{C}_{21}$ et $\Delta\bar{S}_{21}$ ne contribuent qu'à la partie *matière* de l'excitation du mouvement du pôle.

La comparaison des excitations du mouvement du pôle issues (i) de l'astronomie (χ_G , excitation géodésique), et (ii) des séries temporelles des coefficients C_{21} et S_{21} du potentiel gravitationnel terrestre peut alors porter sur leur tendance linéaire. Cette dernière traduit en effet la dérive du pôle moyen d'inertie. Nous pouvons alors constater, grâce à la figure 10.6, que les dérives des deux séries pour la composante χ_2 de l'excitation du mouvement du pôle obtenue par deux types de données différentes est cohérente. Il sera nécessaire de poursuivre nos investigations dans cette étude, et de tester les modèles et les données de ΔC_{21} et ΔS_{21} utilisés (notamment par rapport aux périodes des signaux présents dans ces séries), sans perdre de vue que C_{21} et S_{21} sont relatifs à la Terre entière alors que x_p et y_p (composantes du mouvement du pôle) sont relatifs au manteau seul.

Il s'agit d'un travail tout à fait préliminaire, l'un des premiers à utiliser des données de $\Delta\bar{C}_{21}$ et $\Delta\bar{S}_{21}$, qui mérite d'être poursuivi, étudié et testé plus avant.

Chapitre 11

Précession Nutation

11.1 Introduction

Les modèles de précession jusqu’au modèle UAI 1976 étaient issus des mesures d’astrométrie optique. De nos jours, ce sont les mesures VLBI qui sont employées, comme dans le modèle UAI 2000 (appelé MHB2000 ; Mathews et al. 2002) adopté le 1er janvier 2003 par l’UAI. Ce dernier contient une série de nutations pour une Terre non-rigide, ainsi que des corrections aux vitesses de précession en longitude et en obliquité estimées à partir de 20 ans d’observations VLBI.

Les angles de précession ψ_A (en longitude) et ω_A (en obliquité) sont exprimés de manière polynomiale : $\psi_A = \psi_0 + \psi_1 t + \psi_2 t^2 + \psi_3 t^3$ et $\omega_A = \omega_0 + \omega_1 t + \omega_2 t^2 + \omega_3 t^3$, où le temps t est exprimé en *siècles juliens depuis J2000*. Dans les modèles de précession on cherche à exprimer les coefficients de ces développements. Nous avons vu au §3.3.3 que les équations de la précession de l’équateur Eq. (3.22) dépendaient de l’ellipticité dynamique H et que l’on pouvait chercher à introduire les variations de H dans ces équations afin d’en étudier les implications. Ceci peut être fait par l’intermédiaire des données de variations temporelles de C_{20} (voir Eq. (3.35)) mesurées par des techniques de géodésie spatiale (voir §2.3, §2.4, et Chapitre 7). Les premières études de ces variations temporelles des coefficients de degré deux du potentiel de gravité terrestre remontent au début des années 1990 (par exemple, Nerem et al. 1993, Cazenave et al. 1995, Bianco et al. 1998). Ces variations sont dues à des redistributions de masses dans les réservoirs géophysiques, aux marées terrestres ou océaniques, ou encore au rebond post-glaciaire effet principal de ΔC_{20} (Yoder et al. 1983). Les données de ΔC_{20} utilisées dans cette étude proviennent du modèle GRIM5, basé sur l’étude du positionnement d’une combinaison de plusieurs satellites observés par télémétrie laser, entre 1985 et 2002 (Biancale et al. 2002).

Le modèle récent UAI 2000 garantit une précision sur les angles de nutation de l’ordre de 200 μ as, c’est pourquoi dorénavant tous les effets prédictibles de l’ordre de 10 μ as devraient être pris en compte. En l’occurrence, les variations (ΔH) du paramètre H peuvent être l’un de ces effets. De plus, le modèle UAI 2000 est basé sur l’amélioration des vitesses de précession en longitude et en obliquité (ψ_1 et ω_1 , respectivement), comme nous l’avons déjà précisé. Cependant, ce modèle n’améliore pas les termes du modèle précédent (UAI 1976) pour les degrés supérieurs du développement polynomial des angles de précession, qui dépendent aussi de ces vitesses de précession. Il n’est donc pas dynamiquement consistant (Capitaine et al. 2003). Une amélioration possible serait de considérer les contributions géophysiques aux angles de précession et en particulier l’influence de

ΔH (ou de manière équivalente ΔC_{20}).

Le but de ce chapitre est donc de montrer l'influence des données de géodésie spatiale (plus particulièrement de ΔC_{20}) sur le développement des angles de précession. Cette étude est issue de l'article de Bourda & Capitaine (2004). Précisons que dans toute cette étude le temps t est en siècles juliens de TT. Nous allons présenter comment nous avons utilisé ces données de ΔC_{20} afin de modéliser les variations temporelles de H , puis les résultats obtenus après l'introduction de ces ΔH dans les équations de la précession.

11.2 Valeurs numériques pour les variables de ce problème

La communauté scientifique a adopté des valeurs officielles pour certains paramètres astronomiques ou géophysiques auxquels nous faisons appel. Nous pouvons notamment nous appuyer sur le rapport de Groten (1999) pour l'IAG, ou bien sur les IERS Conventions 2003 (McCarthy & Petit 2003) afin de rappeler les valeurs qui nous intéressent dans le Tableau (11.1).

TAB. 11.1 – Valeurs numériques admises. Les valeurs indiquées pour ϵ , J_2 et R_e sont dans le "zero-frequency tide system".

Nom	Param.	Valeur	Obtention/Source
Aplatissement géométrique	ϵ	1/298.25642 1/298.25645	Source EGM96. Ajusté lors de l'altimétrie laser (Source Topex/Poseidon; Bursa et al. 1998)
Ellipticité dynamique astronomique	H	$3.2737949 \cdot 10^{-3}$	Ajustement entre une valeur observée (VLBI ou optique) de la vitesse de précession en longitude et le modèle de perturbation lunisolaire (Source MHB2000).
Ellipticité dynamique géophysique	e	$3.2845479 \cdot 10^{-3}$	$e = H/(1 - H)$ (voir Eq. (H.2)) ou bien ajustement géophysique (Source MHB2000).
Coefficient du géopotential	J_2	$1.0826359 \cdot 10^{-3}$	Ajusté à partir de mesures de positionnement de satellites et des modèles de forces (Source EGM96).
	$C/(MR_e^2)$	0.330701	$C/(MR_e^2) = J_2/H$ (Source IAG 1999).
Rayon équatorial	R_e	6378136.6 m	Source EGM96.

11.3 Séries temporelles du coefficient de Stokes C_{20} utilisées

La série de ΔC_{20} utilisée dans cette étude est la série de C_{20} variable dans le temps, basée sur le modèle GRIM5, comme nous l'avons déjà précisé et détaillée aux paragraphes §7.1 et §7.2. La combinaison des observations de satellites (d'orbites de caractéristiques variées) effectuée lors de l'obtention de la série permet une meilleure décorellation entre

notamment les coefficients zonaux $J_2 = -C_{20}$ et $J_4 = -C_{40}$ du potentiel gravitationnel terrestre. Cette série (voir Fig. 7.10) comprend (i) une partie modélisée provenant de l'effet des marées solides (voir Fig. 7.8) ou bien océaniques (voir Fig. 7.9) (IERS Conventions 1996), ou encore des variations de pression atmosphérique (voir Fig. 7.6) (Chao & Au 1991 ; Gegout & Cazenave 1993) sur ΔC_{20} , et (ii) une partie résiduelle (voir Fig. 7.1) obtenue comme différence entre les mesures et les modèles. Les différents changements dans le système terrestre (Terre solide, Atmosphère, Océans) sont modélisés en tant que variations du coefficient harmonique sphérique C_{20} , que l'on peut exprimer en tant que ΔH et ainsi modéliser.

Résidus ΔC_{20} et leur tendance séculaire : partie observationnelle

Des études précédentes ont déjà pris en compte l'effet des variations séculaires de C_{20} sur la précession de l'équateur. Une telle variation séculaire est notamment imputée au rebond post-glaciaire (Yoder et al. 1983), qui a tendance à réduire l'aplatissement terrestre. Williams (1994) et Capitaine et al. (2003) ont considéré une valeur pour \dot{J}_2 de $-3 \times 10^{-9}/\text{cy}$ (dans cette étude, cy signifie siècles). En utilisant la valeur numérique (voir Table 3.3) de la contribution du premier ordre ($f_{01} \cos \epsilon_0$) à la vitesse de précession r_0 , directement proportionnelle à J_2 , la contribution ($\dot{J}_2/J_2 \times f_{01} \cos \epsilon_0$) de \dot{J}_2 à l'accélération de précession $d^2\psi_A/dt^2$ est de l'ordre de $-0.014''/\text{cy}^2$, ce qui engendre une contribution supplémentaire de l'ordre de $-0.007''/\text{cy}^2$ au terme en t^2 de l'expression de ψ_A .

Depuis 1998, un changement dans la variation séculaire des données de J_2 est survenu (Cox & Chao, 2000). On peut le constater dans la figure 7.1. Dickey et al. (2002) ont tenté de modéliser cet effet grâce à des données océaniques, d'hydrologie et des modèles géophysiques. A partir des séries GRGS de \bar{C}_{20} , nous avons estimé la pente séculaire de $J_2 = -\sqrt{5} \bar{C}_{20}$ entre 1985 et 1998 (voir Fig. 11.1). Nous avons trouvé : $\dot{J}_2 = -2.5 (\pm 0.2) \times 10^{-9}/\text{cy}$, ce qui engendre une contribution supplémentaire de l'ordre de $-0.006''/\text{cy}^2$ au terme en t^2 de l'expression de l'angle de précession ψ_A .

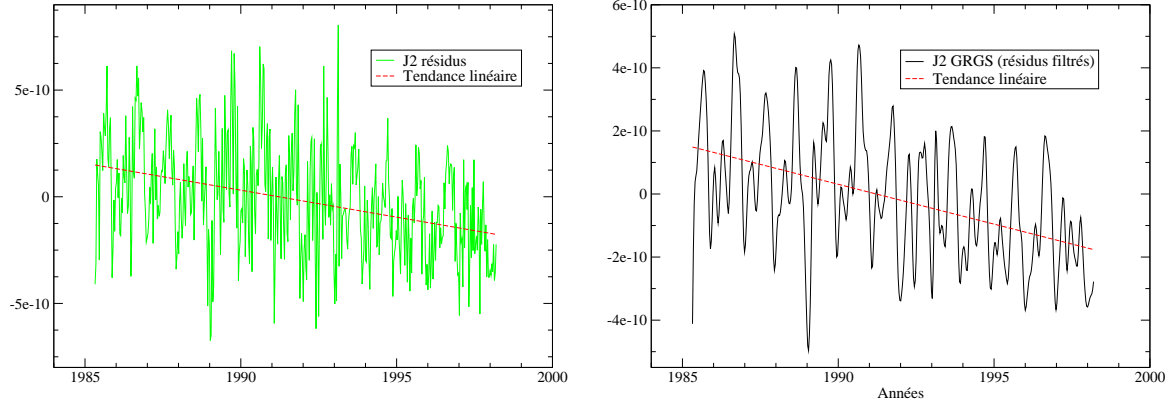
Cette détermination de la tendance séculaire dépendant de l'intervalle d'étude considéré, nous modéliserons d'autre part l'effet à long terme de ΔC_{20} résiduel par un phénomène de périodes 18.6 et 9.3 ans. Une telle période dans les données de J_2 peut provenir de mauvaises modélisations utilisées lors du traitement des données, en particulier de l'effet en 18.6 ans des marées solides. Nous modéliserons donc les effets à long terme dans les données de ΔH équivalentes soit par (i) une tendance séculaire, soit par (ii) les termes en 18.6 et 9.3 ans présents dans l'intervalle d'étude 1985-2002.

Cependant, il faut noter qu'une tendance séculaire de l'ordre de $-3 \times 10^{-9}/\text{cy}$ dans les données de J_2 serait plus cohérente avec les études à long terme de la rotation terrestre faites par Morrison & Stephenson (1997), et basées sur des données d'éclipses depuis 2000 ans qui correspondent à $\dot{J}_2 = (-3.4 \pm 0.6) \times 10^{-9}/\text{cy}$.

11.4 Ajustements dans les données de ΔH

L'équation (3.35) nous permet de transformer les données de $\Delta \bar{C}_{20}$ en ΔH . Ces dernières peuvent alors être introduites dans les équations de la précession Eq. (3.22), en y remplaçant H par $H + \Delta H$. Puis nous utilisons le processus déjà décrit §3.3.3.

Il est généralement considéré que les observations VLBI de l'orientation de la Terre dans l'espace ne sont pas sensibles aux contributions des couches fluides de la Terre (at-



(a) Résidus bruts.

(b) Résidus filtrés, de manière à ce que les signaux de haute fréquence soient retirés.

FIG. 11.1 – Résidus J_2 du GRGS : estimation de la tendance linéaire, de 1985 à 1998.

mosphère, océans) dans les variations de C_{20} (de Viron 2004). Cependant, les amplitudes de ces effets ont été évaluées dans la Table 11.9 afin de permettre de futures études et nous pouvons constater leur effet négligeable sur les angles de précession, dans le cas où elles sont considérées.

L'approche semi-analytique permettant de résoudre les équations de la précession fournit des développements polynomiaux des angles de précession ψ_A et ω_A . Les données de ΔH sont alors considérées comme une expression linéaire avec des termes de Fourier de périodes déduites d'une analyse spectrale (18.6 ans, 9.3 ans, annuel, semi-annuel) (voir Tables 11.2, 11.3, 11.4 et 11.5). Notons que les phases des angles utilisées pour ajuster nos termes périodiques dans les données de ΔH sont celles correspondant aux nutations de période équivalente. Nous pouvons alors constater des changements dans les développements des angles de précession (ψ_A, ω_A) , que nous allons détailler au prochain paragraphe.

En ce qui concerne la contribution des résidus de ΔC_{20} (i.e. de ΔH), nous considérons (i) un ajustement d'une pente séculaire sur l'intervalle 1985-1998 (voir Table 11.4 et Eq. (11.1)), et (ii) un ajustement d'une tendance séculaire et d'un terme de période 18.6 ans (voir Table 11.3 et Eq. (11.2)), tous deux ajoutés aux termes saisonniers annuel et semi-annuel. L'ajustement (i) de la tendance séculaire donne :

$$\dot{H} \simeq -7.4 \times 10^{-9}/\text{cy} \Leftrightarrow \dot{J}_2 \simeq -2.5 \times 10^{-9}/\text{cy} \quad (11.1)$$

et l'ajustement (ii) donne :

$$\begin{aligned} \Delta H = & (74 \times 10^{-11}) \times t + (20.9 \times 10^{-11}) \times \sin(\omega t) \\ & + (32.5 \times 10^{-11}) \times \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (11.2)$$

avec $\omega = 2\pi/0.186$ /cy.

Nous rappelons que ces ajustements sont effectués également avec des termes annuel et semi-annuel. De plus, les termes de haute fréquence de ΔH ont été filtrés, c'est pourquoi nous ne prenons pas en compte les effets de période inférieure à 180 jours, comme par exemple les effets diurnes pouvant apparaître dans les contributions géophysiques à ΔH .

TAB. 11.2 – Résumé des parties constantes de H et C_{20} (Partie constante + Marée permanente) utilisées dans cette étude..

H_{MHB}	3.2737942×10^{-3}
\bar{C}_{20}	-4.841695×10^{-4}
J_2	1.0826358×10^{-3}
H^*	3.2671524×10^{-3}
H^* avec les parties constantes géophysiques	3.2671521×10^{-3}
H^{**}	3.2735556×10^{-3}

TAB. 11.3 – Ajustement de termes périodiques dans les différentes contributions à ΔH (atmosphérique $\Delta H_{\text{atm.}}$, marées océaniques $\Delta H_{\text{oc.}}$ et marées solides $\Delta H_{\text{soltid.}}$, ainsi que la partie résiduelle $\Delta H_{\text{res.}}$), sur l'intervalle d'étude 1985-2002 - Unités : 10^{-10} rad.

Période (en années)	$\Delta H_{\text{res.}}$		$\Delta H_{\text{atm.}}$		$\Delta H_{\text{oc.}}$		$\Delta H_{\text{soltid.}}$	
	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos
1	2.17	-4.02	0.96	-1.66	-3.92	1.41	-4.64	0.89
0.5	-0.43	3.71			0.76	1.56	-0.34	28.04
18.6	2.09	3.25					-0.46	-26.29
9.3	-0.17	-1.65					-0.01	0.29

TAB. 11.4 – Ajustement spécifique des données résiduelles de ΔH ($\Delta H_{\text{res.}}$), de 1985 à 1998. La tendance séculaire est considérée comme dans Eq. (11.1) - Unités : 10^{-10} rad.

Période (en années)	$\Delta H_{\text{res.}}$	
	sin	cos
1	2.57	-3.84
0.5	-0.50	3.80

TAB. 11.5 – Ajustement des données de ΔH totales ($\Delta H_{\text{tot.}}$), de 1985 à 2002 - Unités : 10^{-10} rad.

Période (en années)	$\Delta H_{\text{tot.}}$	
	sin	cos
1	-5.39	-3.39
0.5	0.07	33.67
18.6	0.92	-23.11
9.3	-0.08	-0.50

11.5 Effets des différentes contributions à ΔH sur les angles de précession

Sur la base des modèles ajustés aux séries de ΔH (issues des séries de $\Delta \bar{C}_{20}$) dans le paragraphe précédent, nous allons chercher à établir l'influence de ces données de géodésie spatiale sur le développement des angles de précession.

Tout d'abord, nous allons évaluer l'effet de différentes tendances séculaires de J_2 sur le développement des angles de précession. Ensuite, nous montrerons en quoi les déterminations astronomiques et géodésiques de la partie constante de H sont différentes. Enfin, nous nous concentrerons sur les effets des différentes contributions périodiques de ΔH .

11.5.1 Influence de \dot{J}_2

Nous avons déjà abordé (§11.3) l'influence que \dot{J}_2 avait sur le développement polynomial des angles de précession. Mais en fonction de la valeur adoptée pour ce \dot{J}_2 , l'apport au terme en t^2 du développement polynomial de ψ_A ne sera pas le même. En effet, si nous considérons $\dot{J}_2 = -2.5 \times 10^{-9}/\text{cy}$ comme dans notre étude, ou bien alors $\dot{J}_2 = -3 \times 10^{-9}/\text{cy}$ comme dans Capitaine et al. (2003), la contribution à l'accélération de ψ_A varie de $1.5 \text{ mas}/\text{cy}^2$ (voir Table 11.6). Cela montre l'importance du choix de la valeur de \dot{J}_2 à utiliser dans les modèles.

De plus, (i) nous avons déjà noté que l'existence d'une telle tendance séculaire avait été discutée récemment à cause du changement de pente survenu en 1998 dans les données de J_2 (voir Fig. 7.1), et (ii) l'incertitude de cette tendance séculaire issue de données de géodésie spatiale est assez importante. En effet, si l'on considère comme dans cette étude que \dot{J}_2 est déterminé à $\pm 0.2 \times 10^{-9}/\text{cy}$ près, alors ceci implique une incertitude sur l'accélération engendrée dans ψ_A de l'ordre de $\pm 459 \mu\text{as}/\text{cy}^2$.

Cependant, il n'y a pas d'éléments suffisants pour choisir entre la valeur de J_2 déterminée ici et celle utilisée dans Capitaine et al. (2003). Par conséquent, tant que l'on ne dispose pas d'une meilleure détermination de \dot{J}_2 , la précision sur l'accélération engendrée dans ψ_A est limitée à $1.5 \text{ mas}/\text{cy}^2$.

11.5.2 Précession - Effet de différentes valeurs pour la partie constante H

Nous pouvons tout d'abord comparer la partie polynomiale des angles de précession de notre solution Geod04, basée sur l'utilisation (i) d'une partie constante de H égale à H_{MHB} (voir Table 11.2) et (ii) d'une partie variable fournie par Eq. (11.2), avec des développements d'études précédentes (UAI 2000 et P03) (voir Table 11.7).

Les différences supérieures à $1 \mu\text{as}$ concernent l'angle de précession ψ_A et plus particulièrement les termes en t^2 et t^3 de son développement polynomial. Ainsi, les différences par rapport à P03 (7 mas et $2 \mu\text{as}$, respectivement) sont dues au fait que l'on ne considère pas de tendance séculaire bien marquée pour J_2 , mais plutôt un effet à long terme de période 18.6 ans (voir (3) dans la Table 11.7, ou (2) dans la Table 11.8).

Si nous comparons nos résultats à ceux de UAI 2000 (qui ne considère aucune tendance séculaire pour J_2), nous constatons des différences de l'ordre de 0.6 mas et $5 \mu\text{as}$ dans

TAB. 11.6 – Influence de \dot{J}_2 sur le développement polynomial de ψ_A (plus particulièrement, sur les termes en t^2 et t^3) : (1) UAI 2000 (Mathews et al. 2002), (2) P03 (Capitaine et al. 2003) et (3) Même traitement que dans P03 mais avec d’autres valeurs pour \dot{J}_2 . L’estimation de la tendance séculaire de J_2 est basée sur notre série de \bar{C}_{20} résiduels : $\dot{J}_2 = -2.5 \times 10^{-9}/\text{cy}$.

	\dot{J}_2	t^2	t^3
(1) UAI 2000	None	$-1''.07259$	$-0''.001147$
(2) P03	$-3 \times 10^{-9}/\text{cy}$	$-1''.079007$	$-0''.001140$
Différences par rapport à P03			
	0 /cy	-7.000 mas	$2 \mu\text{as}$
(3)	$-2 \times 10^{-9}/\text{cy}$	-2.871 mas	$1 \mu\text{as}$
	$-2.3 \times 10^{-9}/\text{cy}$	-1.954 mas	$1 \mu\text{as}$
	$-2.5 \times 10^{-9}/\text{cy}$	-1.495 mas	$1 \mu\text{as}$

les termes en t^2 et t^3 , respectivement. Ceci résulte de l’amélioration de la cohérence de la solution Geod04 (basée sur les équations de la précession de P03) par rapport à UAI 2000.

Nous pouvons noter que de tels résultats concernant les termes en t^2 et t^3 du développement polynomial des angles de précession ne seront pas affectés si des changements de l’ordre de 1 mas/cy dans la vitesse de précession se produisaient dans une version mise à jour de la solution de P03.

Ensuite, nous pouvons évaluer les différences introduites dans le développement de ψ_A (et ω_A) par l’utilisation d’une partie constante pour H déterminée de manière géodésique (différente de H_{MHB} qui est la valeur de l’ellipticité dynamique dite astronomique et qui est utilisée dans Geod04). En effet, dans les solutions Geod04-H* et Geod04-H** de la Table 11.7, les valeurs de H^* et H^{**} respectivement, sont utilisées au lieu de H_{MHB} . Ceci engendre des différences significatives dans le développement polynomial de ψ_A et ω_A . Mais l’on doit noter que l’utilisation de J_2 pour déterminer H souffre de grosses erreurs introduites par la mauvaise modélisation du rapport C/MR_e^2 .

11.5.3 Contributions périodiques à ΔH : effet sur ψ_A et ω_A

Sur la base des ajustements effectués au §11.4 pour les différentes contributions à ΔH , nous estimons les effets périodiques engendrés dans le développement polynomial des angles de précession. Nous pouvons nous concentrer sur les termes de Fourier de ψ_A , qui s’avèrent être les plus sensibles aux variations de H . Les résultats correspondants sont présentés dans la Table 11.9.

- Tout d’abord, nous pouvons noter que le principal effet est dû au terme en 18.6 ans des marées solides (contribution numéro (3) dans la Table 11.9) : $-2 \mu\text{as}$ and $120 \mu\text{as}$ en cosinus et sinus, respectivement. Les effets annuels et semi-annuels de marées ter-

TAB. 11.7 – Partie polynomiale des développements de ψ_A et ω_A (unités en secondes d’arc) : Comparaison entre (1) UAI 2000 (Mathews et al. 2002) - (2) P03 (Capitaine et al. 2003) - (3) Différence de Geod04 (cette étude) avec P03, sachant que l’on considère toutes les contributions à ΔH (Table 11.5, ΔH_{tot}) - (4) Différence de Geod04 avec P03, obtenue avec une partie constante pour H différente de H_{MHB} , mais non utilisée dans la suite (voir Table 3.2 pour les valeurs des parties constantes H^* et H^{**}).

Angle	Source	t^0	t	t^2	t^3
	(1) <i>UAI 2000</i>		5038".478750	-1".07259	-0".001147
	(2) <i>P03</i>		5038".481507	-1".079007	-0".001140
Différences par rapport à P03					
ψ_A	(3) Geod04 H_{MHB}		0"	-7 mas	2 μ as
	(4) Geod04 $\left\{ \begin{array}{l} H^* \\ H^{**} \end{array} \right.$		$\simeq 10''.23$	-9.177 mas	-3 μ as
			$\simeq 0''.37$	-7.079 mas	2 μ as
	(1) <i>UAI 2000</i>	84381".448	-0".025240	0".05127	-0".00772
	(2) <i>P03</i>	84381".406	-0".025754	0".051262	-0".007725
Différences par rapport à P03 en μ as					
ω_A	(3) Geod04 H_{MHB}	0	0	0	0
	(4) Geod04 $\left\{ \begin{array}{l} H^* \\ H^{**} \end{array} \right.$	0	0	104	-35
		0	0	3	-1

restres solides sont négligeables, tout comme tous les effets atmosphériques ou de marées océaniques (contributions numéros (4) et (5) dans Table 11.9).

- Ensuite, les variations de H limitées à la partie résiduelle, non modélisée dans l’ajustement d’orbite, introduit des termes de Fourier négligeables dans le développement de ψ_A . Mais par contre, la manière dont on considère les effets à long terme de la contribution résiduelle à ΔH (i.e. soit avec une tendance séculaire (contribution numéro (1) dans la Table 11.9), soit avec un terme de période 18.6 ans (contribution numéro (2) dans la Table 11.9)) est importante car les implications sont différentes. En effet, modéliser l’effet à long terme sur l’intervalle d’étude 1985-2002 par l’intermédiaire de variations de période 18.6 ans introduit dans le développement polynomial de ψ_A des termes d’amplitude 15 μ as (en sinus). Mais pour l’instant, l’intervalle de données C_{20} disponible n’est pas assez long afin de permettre de discriminer les deux modèles.

Finalement, nous pouvons conclure que les variations temporelles totales de C_{20} (contribution numéro (6) dans la Table 11.9) introduisent des termes de Fourier dans le développement de ψ_A principalement de période 18.6 ans et d’amplitude de l’ordre de : 4 μ as et 105 μ as en cosinus et sinus, respectivement.

TAB. 11.8 – Partie polynomiale du développement de ψ_A (unités en secondes d’arc) pour différentes sources de ΔH utilisées dans notre étude, par rapport à P03 : Comparaison entre (1) P03 (Capitaine et al., 2003) - (2) Différence entre P03 et Geod04 (i.e. effet de la contribution totale à ΔH) - (3) Différence entre P03 et l’effet de ΔH résiduel.

Angle	Source	t	t^2	t^3
	(1) <i>P03</i>	5038''.481507	-1''.079007	-0''.001140
ψ_A	Différences par rapport à P03 en μas			
	(2) Geod04 contributions totales	0	-7000	2
	(3) Geod04 résidus	1985-1998	0	-1495
		1985-2002	0	-7000

TAB. 11.9 – Partie de Fourier du développement polynomial de ψ_A , suivant la contribution périodique considérée pour ΔH (unités en μas).

Contribution périodique pour le terme en t^0 de ψ_A					
			μas		
			cos	sin	
ΔH contributions périodiques	(1)	Résidus	Annuel	-1	-1
		(1985-1998)	Semi-annuel	-	1
	(2)	Résidus (1985-2002)	18.6-yr	10	-15
			9.3-yr	-	4
			Annuel	-1	-1
			Semi-annuel	-	1
	(3)	Marées solides	18.6-yr	-2	120
			9.3-yr	-	-1
			Annuel	1	-
			Semi-annuel	-	3
	(4)	Marées océaniques	Annuel	1	-
			Semi-annuel	-	-
	(5)	Atmosphère	Annuel	-	-
	(6)	Geod04 contributions totales	18.6-yr	4	105
			9.3-yr	-	1
			Annuel	1	-1
			Semi-annuel	-	4

11.6 Discussion et conclusion

Cette étude est basée sur de nouvelles considérations, notamment l'utilisation de données géodésiques du champ de gravité variable afin d'étudier leur influence sur le développement polynomial des angles de précession. Le principal effet est dû à la tendance séculaire de J_2 qui introduit une accélération dans le développement de ψ_A . Cependant pour le moment, il est assez difficile de se prononcer sur la valeur de \dot{J}_2 à utiliser, étant donné que l'intervalle de données de J_2 provenant de la géodésie spatiale dont on dispose n'est pas assez long. La tendance séculaire de J_2 que nous avons déterminée, basée sur une série GRGS de données de \bar{C}_{20} de 1985 à 1998, est : $\dot{J}_2 = -2.5 \pm 0.2 \times 10^{-9}/\text{cy}$. La précision de l'accélération de précession engendrée est limitée à 1.5 mas/cy^2 à cause de l'incertitude sur cette valeur de \dot{J}_2 (de l'ordre de $0.5 \times 10^{-9}/\text{cy}$).

Ensuite, nous pouvons préciser que le principal effet périodique sur le développement de ψ_A est dû à une contribution de ΔH provenant du terme en 18.6 ans des marées solides. Cependant, afin d'obtenir ces séries temporelles de \bar{C}_{20} , des hypothèses sont faites quant aux modèles implémentés dans le logiciel d'ajustement d'orbite et qui permettent d'exprimer les contributions à ΔC_{20} provenant des marées solides, océaniques ou des variations de pression atmosphériques. Par conséquent, des erreurs étant faites lors de ces modélisations, elles se retrouvent dans les résultats et cet effet à 18.6 ans en est peut-être le résultat. C'est pourquoi la série totale de $\Delta \bar{C}_{20}$ (résidus observés + modèles supposés) constitue une meilleure source afin d'estimer l'effet de ΔH sur ψ_A . C'est ainsi qu'un terme en 18.6 ans apparaît dans le développement polynomial de ψ_A , d'amplitude $4 \mu\text{as}$ et $105 \mu\text{as}$ en cosinus et sinus, respectivement (voir Table 11.9).

Ces résultats doivent être comparés au modèle de nutations de UAI 2000, car les termes engendrés par les contributions ΔH dans le développement de ψ_A ont les mêmes périodes que certaines nutations ($\Delta\psi$, $\Delta\epsilon$). Il devrait donc y avoir des couplages entre ces termes. Cependant, ces contributions ΔH provenant en grande partie des marées solides, il nous faudra nous demander si cet effet n'a pas déjà été pris en compte dans MHB 2000, auquel cas le couplage ne devrait pas être considéré.

Dans le futur, nous pourrions comparer nos données de J_2 avec des modèles et autres données géophysiques, afin de se faire une idée plus précises des différentes contributions à ΔJ_2 et \dot{J}_2 . Nous pourrions également procéder à une étude numérique de ce problème, et implémenter un modèle de Terre plus réaliste.

Chapitre 12

Conclusion de la Troisième Partie

Dans cette troisième partie, nous avons confronté aux observations les relations liant les variations des coefficients de degré 2 (d'ordre 0 et 1) du potentiel gravitationnel terrestre avec (i) les variations de la longueur du jour, d'une part puis (ii) l'excitation du mouvement du pôle, d'autre part. Nous avons aussi calculé l'influence des variations séculaires et périodiques de C_{20} sur la précession par l'intermédiaire du paramètre d'ellipticité dynamique H (Bourda & Capitaine 2004).

L'étude sur les variations de la longueur du jour a permis de valider la série de variations temporelles de C_{20} , obtenue par la redétermination du champ de gravité basée sur l'étude du positionnement des satellites géodésiques Lageos I et Lageos II entre 1985 et 2004 (Biancale & Lemoine 2004). Moyennant la prise en compte des modèles de variations de pression atmosphérique, marées océaniques et marées solides contribuant aux variations de C_{20} , les variations observées de ce coefficient harmonique sphérique permettent de calculer les variations de longueur du jour correspondantes (Fig. 9.13; sous l'hypothèse que la trace du tenseur d'inertie est alors invariante dans le temps pour les phénomènes considérés). Ces dernières sont alors imputées à des effets géophysiques induisant des redistributions de masses (amplitude annuelle de $33 \mu\text{s}$ et semi-annuelle de $26 \mu\text{s}$), autres que l'atmosphère et les océans, et mériteraient donc d'être comparées à des modèles, comme les modèles hydrologiques par exemple.

L'étude sur l'excitation du mouvement du pôle, dont la partie *matière* peut être calculée avec les séries temporelles des coefficients harmoniques sphériques C_{21} et S_{21} (Biancale & Lemoine 2004) est tout à fait préliminaire et méritera d'être testée plus avant ainsi qu'approfondie dans le futur.

Nous avons ensuite testé l'influence des variations séculaires et périodiques de C_{20} (Biancale et al. 2002, source GRIM5) sur le développement polynomial des angles de précession de l'équateur (ψ_A et ω_A). Ceci fut entrepris par l'intermédiaire de H , directement relié à C_{20} et intervenant dans les équations de la précession. L'effet principal est dû à la variation séculaire de $C_{20} = -J_2$. Il nous est cependant difficile de déterminer sa valeur exacte avec les techniques de géodésie spatiale : elle peut aisément varier de $J_2 = -2.5 \times 10^{-9}/\text{cy}$ à $-3 \times 10^{-9}/\text{cy}$. Ceci induit une erreur sur le terme en t^2 dans le développement de l'angle de précession ψ_A de l'ordre de $1.5 \text{ mas}/\text{cy}^2$ (Table 11.6). Cependant la technique VLBI ne permet pas de mieux discriminer ce terme. Nous avons de plus mis en évidence un terme de période 18.6 ans de C_{20} influant de manière non négligeable sur le terme constant de ψ_A ($105 \mu\text{as}$ en sinus, Table 11.9). C'est principalement une contribution due aux marées terrestres solides engendrant des redistributions

de masses et donc des variations de C_{20} , mais aussi une contribution autre (pas non plus atmosphérique ni océanique) provenant de la modélisation faite pour les variations de C_{20} , où la cassure vers 1998 de la pente de J_2 a été considérée comme un terme en 18.6 ans.

De manière générale, les données de variations temporelles du champ de gravité peuvent apporter des informations sur les contributions géophysiques autres que l'atmosphère ou les océans (effets bien modélisés) sur les variations des EOP. Cependant, elles ne permettent pas de discriminer les différentes causes possibles. C'est un domaine en plein essor et l'accumulation des données dans les années à venir ainsi que l'utilisation des données des nouvelles missions (GRACE) pourront apporter des éléments supplémentaires afin de compléter la modélisation de la rotation terrestre.

Conclusions générales et perspectives

Travail réalisé

Les études que nous avons effectuées s'inscrivent dans l'effort de la communauté scientifique internationale pour améliorer la connaissance de la dynamique globale de la Terre, en ajoutant ici un nouveau type de données. Elles ont pour finalité la possibilité de compléter les modèles de la rotation de la Terre grâce aux données de variations temporelles du champ de gravité (coefficients de Stokes de degré 2). Elles ont été menées dans l'optique future d'utiliser les variations temporelles du champ de gravité de manière plus routinière, et plus particulièrement les variations temporelles du champ de gravité déterminées grâce aux mesures du satellite GRACE. L'intérêt de ce genre de données réside dans le fait qu'elles correspondent à des redistributions de masses de la Terre globale (incréments des moments d'inertie), dues notamment à des effets géophysiques autres que les couches fluides atmosphérique et océanique. Des progrès considérables ayant été effectués ces dernières années dans la modélisation des effets de ces couches fluides, grâce aux séries de moments cinétiques atmosphérique et océanique, il est en effet dorénavant possible de s'intéresser aux effets résiduels sur la rotation terrestre. Ces séries de moments cinétiques des couches fluides sont calculées dans les différents centres de données et mises à disposition par le *Global Geophysical Fluid Center* de l'IERS.

Nos efforts et contributions ont porté sur :

- l'étude des liens théoriques entre les variations temporelles du champ de gravité de degré 2 et les EOP,
- l'étude du cadre numérique de traitement des mesures des satellites GRACE (dans le logiciel GINS du GRGS/CNES), permettant de déterminer les variations temporelles du champ de gravité,
- l'utilisation de certaines de ces données pour la détermination des variations temporelles des coefficients de degré 2 du champ de gravité grâce aux mesures des satellites artificiels Lageos I et II,
- l'utilisation des données de variations du champ de gravité pour étudier les variations correspondantes des EOP.

Liens théoriques entre EOP et variations du champ de gravité terrestre (Partie 1)

Dans la première partie de cette thèse, nous avons détaillé les équations reliant les paramètres d'orientation terrestres aux variations des coefficients harmoniques sphériques du champ de gravité de degré 2. La nouveauté ici réside dans la démarche d'utiliser des

données de variations du champ, afin de compléter la modélisation de la rotation terrestre.

Nous nous sommes basés sur les équations de Barnes et al. (1983), sous l'hypothèse que la trace du tenseur d'inertie reste invariante dans le temps sous les déformations subies, afin de déduire les équations (3.19) relatives à C_{20} et au LOD , ainsi que les équations (3.20) relatives à C_{21} , S_{21} et à l'excitation du mouvement du pôle.

Nous avons également établi la méthodologie pour exploiter au mieux ce que les données de variations temporelles de C_{20} peuvent apporter pour l'amélioration des modèles de précession-nutation. En se basant sur les travaux de Williams (1994) et Capitaine et al. (2003), ainsi que sur le lien entre l'ellipticité dynamique H et le coefficient C_{20} , nous pourrions introduire les modèles de variations séculaires et périodiques de C_{20} (ajustés sur les données), par l'intermédiaire de ΔH , dans les équations de la précession. L'idée est alors d'étudier l'influence de ces variations sur les développements des angles ψ_A et ω_A de précession, de façon à améliorer le modèle de précession de l'équateur.

Tests numériques et orbitographie (Partie 2)

Dans la deuxième partie de la thèse, nous avons tout d'abord effectué des tests numériques afin de préparer au mieux l'utilisation des mesures du satellite GRACE. Ce dernier permet de déterminer (grâce notamment à la mesure de distance inter-satellite) les variations temporelles du champ de gravité, que nous pourrions utiliser pour l'étude sur la rotation de la Terre lorsqu'elles porteront sur une durée plus longue.

Pour cela, nous avons testé la méthode de Cowell d'intégration numérique pour le calcul d'orbite, généralement utilisée dans le domaine de l'orbitographie et implémentée plus particulièrement dans le logiciel d'orbitographie GINS (GRGS/CNES). L'idée était d'évaluer si les erreurs numériques induites par ce calcul étaient assez faibles pour ne pas détériorer l'excellente précision des mesures sur les satellites GRACE (précision de la mesure inter-satellite de l'ordre de 10 micromètres). De plus, nous avons comparé cette méthode à celle d'Encke, basée sur l'intégration numérique par rapport à une orbite analytique moyenne dont le calcul est non coûteux (orbite analytique moyenne = ellipse avec précession du noeud). Dans le cadre du traitement des mesures du satellite GRACE, ceci permettrait d'intégrer les orbites des deux satellites co-orbitaux (très proches) par rapport à une même orbite analytique moyenne, et de gagner ainsi des facteurs en temps CPU ainsi qu'en précision (distance plus petite à traiter entre l'orbite vraie et l'orbite moyenne que la distance orbitale "classique"). Les tests effectués pour chacune des deux méthodes ont consisté en l'intégration sur deux jours d'un arc fictif du satellite GRACE entre les dates t_0 et T , en partant d'un bulletin initial B (i.e. éléments orbitaux du satellite GRACE au temps t). Le bulletin obtenu au temps T , après intégration numérique de l'orbite, est noté B' . Le but était alors d'effectuer une nouvelle intégration en démarrant de la date T avec le bulletin B' et en revenant en arrière sur l'orbite du satellite jusqu'à l'instant t (pas d'intégration négatif); le bulletin d'arrivée est alors noté B'' . Dans un cas idéal, les erreurs de précision étant nulles, le bulletin B doit être identique à B'' . Cependant, en pratique ce n'est évidemment pas le cas et $B - B''$ donne l'erreur numérique engendrée sur un arc classique du satellite GRACE. Nous avons effectué ces tests pour différents pas d'intégration, ainsi que différents ordres d'intégration pour la méthode de Cowell.

Ainsi, nous avons montré que la méthode de Cowell donnait des résultats satisfaisants, au regard de la précision numérique cherchée de l'ordre de $1 \mu\text{m}$ (pour un pas et un ordre

d'intégration bien choisis). Par contre la méthode d'Encke, supposée meilleure, n'a pas fourni de meilleurs résultats.

Ensuite, nous avons présenté la redétermination du champ de gravité statique et variable (pour le degré 2) effectuée par le GRGS, et basée sur des données des satellites Lageos I et II de 1985 à nos jours (Lemoine et al. 2004). Nous pouvons alors utiliser leurs séries de variations temporelles des coefficients de degré deux du champ de gravité ainsi déterminées (Biancale & Lemoine 2004).

Cependant, ces séries n'ont été obtenues qu'avec seulement deux satellites. Nous pouvions alors nous demander si contraindre leur détermination par des données de champ variable issues du satellite GRACE (dont on a seulement deux ans de données pour l'instant) permettait d'améliorer les résultats obtenus. Nous avons donc introduit dans cette détermination des contraintes sur les variations des coefficients corrélés à ceux du degré 2. Ces contraintes modélisaient les variations données par GRACE de manière annuelle et semi-annuelle. Nous avons redéterminé alors ainsi les séries de variations temporelles des coefficients de Stokes de degré deux. Cependant, nous avons pu constater que ces contraintes n'ont pas permis d'améliorer de manière significative les séries des coefficients C_{20} , C_{21} , S_{21} , C_{22} et S_{22} du géopotentiel.

Etude pratique des implications de variations du champ de gravité sur les EOP (Partie 3)

Dans la troisième partie de la thèse, nous avons utilisé les séries de variations temporelles des coefficients C_{20} , C_{21} et S_{21} du champ de gravité pour l'étude de la rotation de la Terre.

Les variations de l'écart de la longueur du jour (par rapport à 86400 s du SI) correspondant à ΔC_{20} ont été calculées et elles ne correspondent qu'à la partie *matière* des variations totales. Nous avons comparé ces valeurs calculées aux observations corrigées des effets (i) des marées zonales, (ii) des effets à long terme dûs a priori au noyau, et (iii) des parties *mouvement* des couches fluides océanique et atmosphérique, bien modélisés grâce aux moments cinétiques délivrés par les divers centres de données. La corrélation entre ces deux séries étaient de l'ordre de 0.6 (exactement, 0.58), et les termes annuels et semi-annuels présents étaient du même ordre d'amplitude ($\simeq 35 \mu s$ pour le terme annuel et $\simeq 50 \mu s$ pour le semi-annuel). Nous avons alors modélisé et retiré les termes saisonniers de ces deux séries. Les résidus obtenus ne dépassaient pas une amplitude d'environ $8 \mu s$ pour le terme annuel provenant des données de ΔC_{20} , ce qui est considéré dans le bruit, par rapport à la précision des mesures du $\Delta(LOD)$ (par exemple par GPS).

La nouveauté réside surtout dans le fait que les données de ΔC_{20} observé (i.e. où les modèles de variations dues à la pression atmosphérique, et aux marées océaniques et solides ont été retirés) correspondent à des redistributions de masses issues d'effets géophysiques a priori différents de l'atmosphère et des océans. On peut calculer le $\Delta(LOD)_{residus}$ correspondant. Dans l'avenir, il faudra comparer ces résultats à des modèles et données d'hydrologie, par exemple.

De manière analogue à l'étude portant sur le C_{20} , nous avons calculé l'excitation du mouvement du pôle correspondant aux données de C_{21} et S_{21} (résidus de l'ajustement des

mesures par rapport aux modèles ; comme précédemment nous savons que les variations dues à la pression atmosphérique ou bien aux marées océaniques ou solides ne sont pas contenus dans ces séries). Nous l'avons comparée aux données d'excitation du mouvement du pôle issues des composantes x_p et y_p du CIP (séries C04 IERS), à laquelle nous avons retiré les effets de la partie *mouvement* des couches fluides. Cependant il ne s'agit pour l'instant que de résultats très préliminaires ne permettant pas de tirer de conclusions définitives. Nous pourrions notamment utiliser les séries C_{21} et S_{21} déterminées grâce aux mesures du satellite GRACE.

Finalement, nous avons introduit une modélisation des variations de C_{20} dans les équations de la précession et obtenu des termes de Fourier nouveaux dans le développement de l'angle ψ_A (Bourda & Capitaine 2004). La modélisation originale que nous avons adoptée se basait sur la série temporelle de C_{20} issue du modèle de champ GRIM5 (Biancale et al. 2002). Elle tenait compte dans un premier temps de la variation séculaire de J_2 , que nous avons estimée à : $-2.5(\pm 0.2) \times 10^{-9}/\text{cy}$, puis dans un deuxième temps, des termes de période 18.6 et 9.3 ans, ainsi que des termes annuels et semi-annuels.

L'influence principale des variations de J_2 sur la précession est celle de \dot{J}_2 , influant sur le terme en t^2 de ψ_A . Cette contribution a été calculée en se basant sur Williams (1994) et comparée à d'autres contributions issues de valeurs différentes de la variation séculaire de J_2 . Il faut noter qu'une indétermination de $0.5 \times 10^{-9}/\text{cy}$ sur J_2 engendrait une indétermination de l'ordre de $1.5 \text{ mas}/\text{cy}^2$ sur l'angle ψ_A .

Ensuite nous avons calculé l'influence de la deuxième modélisation des variations de C_{20} sur les angles de précession. La contribution principale dans ce cas provenait du terme de période 18.6 ans de ΔC_{20} (due principalement aux marées terrestres solides et dans une moindre mesure à la modélisation du changement de pente dans la série de J_2 comme un terme en 18.6 ans). L'effet provoqué était de l'ordre de $105 \mu\text{as}$ en sinus sur l'angle ψ_A .

Dans cette partie, nous n'avons pas utilisé de données issues des mesures des satellites CHAMP et GRACE, car (i) soit les champs ainsi déterminés sont statiques, soit (ii) ils ne portent pas sur une durée assez longue pour l'instant, afin d'ajuster des termes saisonniers et à long terme dans les séries des coefficients de Stokes de degré deux.

Perspectives et applications

Ce travail permet d'envisager les développements suivants :

- L'étude sur le $\Delta(LOD)$ donne des résultats encourageants et méritera d'être poursuivie. Il sera profitable également de comparer nos résultats obtenus avec (i) ceux issus des modèles et données d'hydrologie, ainsi qu'avec (ii) d'autres études du même type effectuées de manière indépendante (en cours par exemple au *Goddard Space Flight Center*, USA).

- L'étude menée sur l'excitation du mouvement du pôle est préliminaire et nécessitera de tester et d'étudier plus avant les séries de C_{21} et S_{21} déterminées avec les mesures des satellites Lageos I et II (notamment les signaux périodiques présents dans les "résidus" de l'ajustement pour ces séries). Il s'agira aussi d'utiliser les coefficients déterminés d'une

autre manière grâce au satellite GRACE.

- L'étude portant sur les angles de précession pourra être poursuivie en considérant un modèle de Terre plus proche de la réalité.

La modélisation des effets à long terme dans les données de C_{20} méritera d'être testée. Le terme de période 18.6 ans que nous avons ajusté est peut-être tout simplement un effet de la mauvaise modélisation du terme de marée solide à la même période. Nous pourrons aussi comparer l'ajustement, avec seulement 20 ans de données, du terme séculaire de J_2 avec des valeurs provenant des modèles de rebond-postglaciaire, de convection du manteau ou encore des effets des glaciers.

La géodésie spatiale, et plus particulièrement la détermination des variations temporelles du champ de gravité, fournit des données sur les redistributions de masses dues a priori à des effets géophysiques autres que l'atmosphère et les océans. Ceci est un atout majeur pour leur contribution à la modélisation de la rotation terrestre.

Annexe A

Quelques définitions pratiques

Pôle géographique G

Il représente l'intersection du troisième axe du repère terrestre international (ITRF 2000) avec la croûte terrestre.

Mouvement du pôle

C'est le mouvement dans la Terre du CIP par rapport à l'axe des pôles géographiques G . Etant donnée la définition du CIP (voir §1.3.1), il correspond en fait à différents mouvements. En effet, c'est (i) le mouvement du pôle CIP (périodes supérieures à 2 jours dans la Terre), (ii) les termes de nutation de l'axe de figure de période inférieure à 2 jours dans l'espace et que l'on compte donc dans la Terre, et (iii) les termes diurnes et sub-diurnes du mouvement du pôle induits par les marées océaniques ainsi que par des contributions atmosphériques.

Axe de figure

Sur une période donnée, l'axe de figure correspond à la moyenne conventionnelle de l'axe principal d'inertie. Il équivaut à un axe de symétrie pour l'ellipsoïde terrestre. Il se rapporte au pôle géographique G par la dérive séculaire du pôle.

Axe instantané de rotation et vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$

Le vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$ est dirigé suivant l'axe de rotation terrestre et a pour norme la vitesse de rotation. Les observations ne nous y donnent pas accès directement. Il intervient théoriquement dans les équations de Liouville et nous sert à faire des interprétations géophysiques. On l'écrit généralement sous la forme de ses coordonnées dans le repère terrestre : $(\Omega \ m, \Omega \ (1 + m_3))$ où $m = m_1 + i \ m_2$ et Ω est la vitesse de rotation terrestre moyenne. On peut aussi le déterminer à partir de la matrice d'orientation terrestre.

Orientation terrestre

Elle est définie comme la rotation du repère céleste au repère terrestre et peut être exprimée par la matrice de rotation $M : [CRF] = \overline{M} [TRF]$. Cette dernière est paramétrée par les 5 EOP (*Earth Orientation Parameters*).

International Terrestrial Reference Frame (ITRF)

Repère de référence terrestre international : Repère terrestre défini à partir des coordonnées de stations terrestres. L'axe z correspond au pôle géographique G et l'axe x est dirigé vers le méridien de Greenwich. Le centre du repère est le centre des masses de la Terre. Idéalement, il réalise la condition de Tisserand, à savoir que le moment cinétique relatif de la croûte doit y être nul.

International Celestial Reference Frame (ICRF)

Repère de référence céleste international : Repère céleste inertiel (OXYZ) défini par un jeu de coordonnées cartésiennes d'une centaine de quasars et dont le plan fondamental (XY) est voisin de celui de l'écliptique moyen de l'époque J2000, à quelques dizaines de mas près.

Annexe B

Moments et Forces : Rappels élémentaires de mécanique du solide

- Nous pouvons tout d'abord définir le **Moment de Force** de la force \vec{F} comme :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

où \vec{r} est le vecteur reliant le centre de rotation et le point d'application de la force. Pour un système continu de forces, le moment de la force est :

$$\vec{L} = \int_V \vec{r} \wedge d\vec{F}$$

Alors qu'un **couple de force** est un ensemble de deux forces de même norme, parallèles mais de sens contraire. La notion de couple extérieur luni-solaire est par conséquent abusive et se réfère en fait au moment de force luni-solaire.

- La **quantité de mouvement** \vec{p} (ou **impulsion**) est définie de la manière suivante :

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

Ainsi, à masse constante, la Relation Fondamentale de la Dynamique nous donne :

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

- Nous pouvons alors définir une *quantité de rotation* qui est en fait le moment du vecteur quantité de mouvement, par :

$$\vec{H} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m \vec{v}$$

que l'on appelle aussi **Moment cinétique** (ou traduit littéralement : **Moment angulaire**). Et pour un système continu de forces, le moment cinétique est défini par :

$$\vec{H} = \int_M \vec{r} \wedge \vec{v} dM$$

On trouve alors une relation (pour la quantité de rotation) appelée *théorème du moment cinétique* :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}} = \frac{d\vec{H}}{dt} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \dot{\vec{p}} \\ &= \vec{v} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \vec{F} \\ &= \vec{r} \wedge \vec{F} \\ &= \vec{L}\end{aligned}$$

à condition de ne considérer que des forces d'interactions mutuelles centrales.

• Nous pouvons maintenant définir la matrice d'inertie $\underline{\bar{I}}$ de la Terre dans le repère terrestre (Oxyz), qui reflète la *répartition interne des masses* de ce système :

$$\underline{\bar{I}} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Cette matrice est symétrique. Ses coefficients sont appelés moments d'inertie et sont donnés par :

$$\begin{aligned}I_{11} &= \int_y \int_z (y^2 + z^2) dM & I_{12} &= - \int_x \int_y xy dM \\ I_{22} &= \int_x \int_z (x^2 + z^2) dM & I_{23} &= - \int_y \int_z yz dM \\ I_{33} &= \int_x \int_y (x^2 + y^2) dM & I_{13} &= - \int_x \int_z xz dM\end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Si le corps en rotation est *symétrique*, alors $I_{11} = I_{22}$. En ce qui concerne les éléments transversaux, si le centre de rotation correspond au centre des masses, alors ils sont nuls, sinon ce sont les produits d'inertie notés également ΔI_{ij} ou bien encore c_{ij} pour $i, j = 1, 2, 3$.

De manière plus générale, on sépare les parties constantes et variables dans le temps de la matrice d'inertie et on peut alors écrire (de deux manières différentes) :

$$\begin{aligned}\underline{\bar{I}}(t) = \begin{bmatrix} I_{11}(t) & I_{12}(t) & I_{13}(t) \\ I_{12}(t) & I_{22}(t) & I_{23}(t) \\ I_{13}(t) & I_{23}(t) & I_{33}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & c_{13}(t) \\ c_{12}(t) & c_{22}(t) & c_{23}(t) \\ c_{13}(t) & c_{23}(t) & c_{33}(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta I_{11}(t) & \Delta I_{12}(t) & \Delta I_{13}(t) \\ \Delta I_{12}(t) & \Delta I_{22}(t) & \Delta I_{23}(t) \\ \Delta I_{13}(t) & \Delta I_{23}(t) & \Delta I_{33}(t) \end{bmatrix}\end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

où (A, B, C) sont les parties constantes des moments principaux d'inertie et où les c_{ij} (ou bien ΔI_{ij}) sont les incréments d'inertie tels que c_{ij}/C (ou bien $\Delta I_{ij}/C$) sont de petites quantités.

Pour un corps rigide tournant autour d'un point fixe O, les vecteurs **vitesse angulaire** $\vec{\omega}$ et **moment cinétique** \vec{H} sont reliés par le **Tenseur d'Inertie** de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \int \vec{r} \wedge \vec{v} \, dM \\ &= \int \vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \, dM \quad , \text{ car } \vec{v} = \vec{v}_{circ} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \\ &= \underline{\underline{I}} \vec{\omega}\end{aligned}\tag{B.4}$$

Si le système de référence utilisé était celui des axes principaux d'inertie instantanés (i.e. si le centre du système de référence, i.e. le centre de rotation, correspondait au centre des masses de la Terre), alors la matrice $\underline{\underline{I}}$ serait diagonale. Cependant on exprime la matrice d'inertie dans le système de référence terrestre, qui est le cadre de nos observations. Par conséquent, $\underline{\underline{I}}$ n'est pas diagonale dans ce système de référence.

Annexe C

Relations cinématiques d'Euler : Mouvement de l'axe de rotation dans l'espace

En résolvant la première équation de Liouville Eq. (1.18), on trouve la solution m du mouvement équatorial de l'axe instantané de rotation $\vec{\omega}$ dans la Terre. Pour passer au mouvement dans l'espace, on utilise **les relations cinématiques d'Euler** exprimées sous forme complexe :

$$\begin{cases} \dot{\theta} + i \dot{\psi} \sin\theta &= -\Omega m e^{i\phi} \\ \dot{\phi} &= \omega_3 - \dot{\psi} \cos\theta \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

où (θ, ψ, ϕ) sont **les angles d'Euler** entre le repère terrestre et le repère céleste (voir Fig. (C.1)) lié à l'écliptique et l'équinoxe moyen à J2000. La résolution de ces équations nous donne $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ et $\dot{\phi}$, qui par intégration nous donnent les angles d'Euler et donc **l'orientation du repère terrestre dans le repère céleste**.

En effet, on peut exprimer les variations de ces angles, sachant que $\dot{\psi}$ est compté le long de l'axe Z , $\dot{\phi}$ le long de l'axe z et $\dot{\theta}$ le long de l'axe des équinoxes γ_0 ($O\zeta$). Alors :

$$\begin{aligned} \vec{\dot{\theta}} &= (\dot{\theta} \cos\phi, -\dot{\theta} \sin\phi, 0) \\ \vec{\dot{\psi}} &= (\dot{\psi} \sin\theta \sin\phi, \dot{\psi} \sin\theta \cos\phi, \dot{\psi} \cos\theta) \\ \vec{\dot{\phi}} &= (0, 0, \dot{\phi}) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Par conséquent, en ajoutant membre à membre les équations (C.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\psi} \sin\theta \sin\phi + \dot{\theta} \cos\phi \\ \omega_2 &= \dot{\psi} \sin\theta \cos\phi - \dot{\theta} \sin\phi \\ \omega_3 &= \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\phi} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Ainsi, en additionnant la première équation et i fois la deuxième, on obtient bien les relations cinématiques d'Euler citées plus haut.

On appelle ϕ **l'angle de rotation de la Terre dans l'espace**, ψ **l'angle de précession** et θ **l'angle de nutation**.

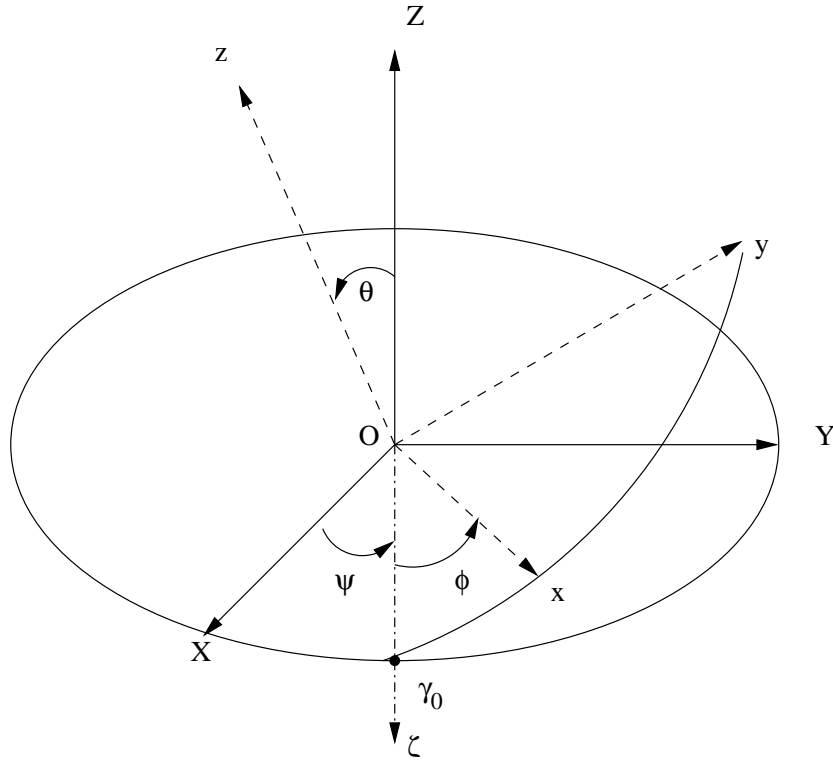


FIG. C.1 – Orientation du repère terrestre $Oxyz$ dans l'espace (repère $OXYZ$), grâce aux angles d'Euler : $\theta = \omega_A + \Delta\omega$ (§1.3.2), ψ est la longitude de l'équinoxe et ϕ est l'angle de rotation de la Terre compté par rapport à l'équinoxe γ_0 ; on rappelle que $O\zeta$ est la ligne des noeuds.

Annexe D

Détermination pratique des paramètres d'orientation terrestre

La rotation instantanée de la Terre n'étant pas observable directement, on utilise des paramètres mesurables pour la caractériser.

L'IERS (International Earth rotation and Reference systems Service) calcule une solution combinée des EOP, par combinaison des résultats trouvés par les différentes techniques géodésiques : interférométrie à très longue base (VLBI), télémétrie laser sur la Lune ou sur satellite (respectivement LLR ou SLR) et positionnement global de satellites (GPS).

Nous allons détailler comment ces EOP sont déterminés à partir de chacune de ces techniques géodésiques (voir par exemple, Lambeck 1988 ou Zarrouati 1997).

D.1 Cas satellitaire

On peut déterminer les paramètres d'orientation de la Terre à partir de l'utilisation de satellites. La quantité de base observée, lorsqu'on utilise le GPS, DORIS ou le laser, est le vecteur $\vec{\rho}(t)$ entre la station terrestre et le satellite.

L'équation d'observation **dans le repère inertiel** est alors :

$$\vec{\rho}(t) = \vec{X}_s(t - \tau) - \vec{X}_p(t) \quad (\text{D.1})$$

où \vec{X}_s est la position géocentrique du satellite et \vec{X}_p celle de la station terrestre. Ces deux positions sont respectivement fonctions (i) des éléments orbitaux K_α à l'époque initiale t_0 , de leurs changements dûs à des perturbations sur l'intervalle de temps $(t - t_0)$ et de paramètres géophysiques C_{ilm} pour le potentiel gravitationnel et β_k pour les autres, puis (ii) des coordonnées de la station terrestre $\vec{x}_p(t)$ dans un repère lié à la Terre. C'est ainsi que les paramètres d'orientation terrestre $\vec{m}\vec{p}(t)$, $\widehat{UT1}(t)$ et $\alpha_j(t)$ apparaissent (respectivement mouvement du pôle, angle de rotation et termes de précession-nutation).

Par conséquent, (D.1) devient :

$$\vec{\rho}(t) = \vec{\rho} [K_\alpha(t), C_{ilm}, \beta_k, \vec{x}_p, \vec{m}\vec{p}, \widehat{UT1}, \alpha_j; t] \quad (\text{D.2})$$

qui est une équation non linéaire reliant les quantités observées et les paramètres (géophysiques, etc ...).

On observe depuis plusieurs stations, bien distribuées géographiquement et on doit alors résoudre un **système d'équations non linéaires**, qu'on **linéarise** autour d'une solution approchée, en général par développement de Taylor du modèle utilisé. On s'intéresse alors à $d\rho = \rho_{obs} - \rho_{calcul}$ l'**écart entre les observations et le modèle**, que l'on cherche à minimiser par moindres carrés.

D.1.1 LASER

Pour la technique laser sur la Lune ou sur satellite, on mesure la **distance Terre-Lune ou Terre-Satellite** par l'intermédiaire du temps aller-retour du rayon laser.

Dans ce cas, l'équation d'observation (D.1) dans un système de référence écliptique inertiel est la suivante :

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}_{lune} + \vec{R}_{lune} - \vec{R}_{\oplus}$$

où le premier vecteur est la position géocentrique de la Lune, le deuxième est la position sélénocentrique du vecteur du réflecteur sur la Lune et le dernier est le vecteur position de la station terrestre.

La magnitude de $\vec{\rho}(t)$ qui nous intéresse est alors fonction des rotations de la Terre (nutations, mouvement polaire, taux de rotation irrégulier, marées terrestres et tectonique des plaques), de la Lune (librations) et du mouvement orbital de la Lune autour de la Terre (éléments orbitaux K_{α}).

D.1.2 DORIS

L'équation d'observation intervenant dans cette méthode est la suivante :

$$f_r - f_t = -f_r \frac{\dot{\rho}}{c} \quad (D.3)$$

où c est la vitesse de la lumière, f_r la fréquence de déplacement Doppler et f_t la fréquence du signal envoyé par le satellite.

La quantité mesurée, elle, est la variation de phase $\Delta\phi$ entre le signal reçu et un signal de référence (stable) de fréquence f_0 , proche de f_t . On écrit :

$$\begin{aligned} \Delta\phi + N &= \int_{t_1}^{t_2} (f_0 - f_r) dt \\ &= f_0 (t_2 - t_1) - \int_{t_1}^{t_2} f_r dt \\ &= f_0 (t_2 - t_1) - \int_{t_1}^{t_2} f_t \left(1 + \frac{\dot{\rho}}{c}\right)^{-1} dt \quad , \text{ d'après l'équation (D.3)} \\ &\simeq f_0 (t_2 - t_1) - \int_{t_1}^{t_2} f_t \left(1 - \frac{\dot{\rho}}{c}\right) dt \\ &= (f_0 - f_t)(t_2 - t_1) + (\rho_2 - \rho_1) \frac{f_t}{c} \end{aligned}$$

où N est un nombre entier de cycles, puis $\rho_1 = \rho(t_1)$ et $\rho_2 = \rho(t_2)$.

Par conséquent, on peut écrire $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ comme :

$$\Delta\rho = [\Delta\phi + N - (f_0 - f_t)(t_2 - t_1)] \frac{c}{f_t} \quad (\text{D.4})$$

Remarque : Notons que la méthode des vitesses radiales est limitée par le petit nombre de satellites en orbite.

D.1.3 GPS

La quantité mesurée, ici, est la phase $\phi_{rij}(t)$ de la fréquence f_{ti} **reçue** à la station j du satellite i au temps t . Elle est comparée à la phase $\phi_{ti}(t)$ du signal **envoyé**, par la relation suivante :

$$\phi_{rij}(t) = \phi_{ti}(t - \tau_{ij}) \quad (\text{D.5})$$

où $\tau_{ij} = \frac{\rho_{ij}}{c}$ est le temps de parcours.

La phase reçue est aussi comparée à la phase $\phi_{oj}(t)$ reçue par l'oscillateur, pour produire la différence de phase suivante :

$$\Delta\phi_{ij}(t) = \phi_{rij}(t) - \phi_{oj}(t) \quad (\text{D.6})$$

Comme τ_{ij} est une petite quantité, on peut faire un développement de Taylor à son voisinage et on a l'expression suivante pour la différence de phase (D.6) :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{ij}(t) &= \phi_{rij}(t) - \phi_{oj}(t) \\ &= \phi_{ti}(t - \tau_{ij}) - \phi_{oj}(t) \\ &= \phi_{ti}(t) - f_{ti}(t) \frac{\rho_{ij}}{c} - \phi_{oj}(t) + N_{ij} + O(\tau_{ij}) \end{aligned}$$

où N_{ij} est appelé "*initial phase ambiguity*" (ou "*phase bias*").

D.2 VLBI

Dans la technique d'interférométrie à très longue base, la quantité de base observée est l'écart de temps de parcours du rayonnement radio d'une source extragalactique entre deux radio-télescopes terrestres (voir Fig. D.1).

L'écart de temps géométrique τ_g observé est alors :

$$\tau_g = \frac{\vec{k} \cdot \vec{b}}{c}$$

Mais en réalité, le front d'onde arrivant aux radio-télescopes est dévié par l'atmosphère terrestre et les masses gravitantes du système solaire, créant une variation de temps supplémentaire ($\Delta\tau_{phys}$). Il y a aussi des variations de temps induites par les instruments ($\Delta\tau_{instru}$), ne permettant pas la restitution instantanée du signal : défaut de synchronisation d'horloges. On mesure donc en fait le délai suivant :

$$\tau = \tau_g + \Delta\tau_{phys} + \Delta\tau_{instru}$$

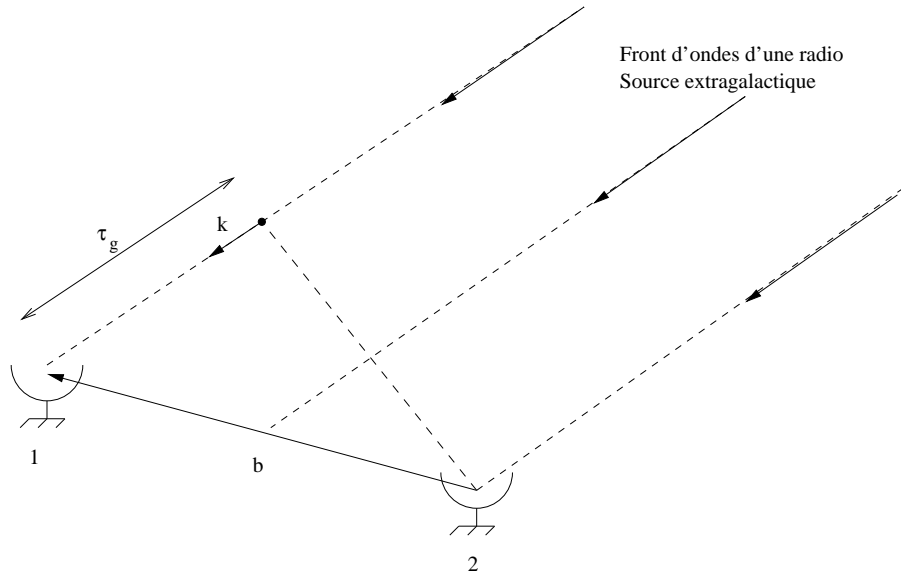


FIG. D.1 – Mesures d’interférométrie à très longue base entre deux radio-télescopes séparés par une ligne de base \vec{b} : la différence de temps de réception entre les deux antennes est $c \Delta T$ (i.e. τ_g).

Grâce à l’utilisation de deux fréquences différentes, on arrive cependant à connaître le défaut de temps dû à la perturbation de la couche supérieure de l’atmosphère (i.e. l’ionosphère). Et le défaut de temps dû à l’instrument est testé lors de l’étalonnage de ce dernier. On effectue de plus la transformation du vecteur de base \vec{b} du repère terrestre (dont on dispose grâce aux coordonnées des deux stations radio-télescopes dans le repère terrestre) au repère céleste, par la relation suivante : $[\vec{b}]_{CRF} = \overline{M} [\vec{b}]_{TRF}$, où \overline{M} est la matrice de rotation dépendant de $(x_p, y_p, UT1, \delta\psi, \delta\epsilon)$. On obtient alors l’équation suivante :

$$\tau = \frac{[\vec{k}]_{CRF}^t (\overline{M} [\vec{b}]_{TRF})}{c} + \Delta\tau_{phys} + \Delta\tau_{instru}$$

où les effets relativistes n’ont pas été indiqués. En considérant différentes mesures espacées dans le temps (par exemple sur un jour), on obtient un **système d’équations non linéaire** par rapport aux inconnues que sont les 5 EOP (mais également par rapport à d’autres paramètres).

On a alors le système d’équations non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \tau_1 = f_1(x_p, y_p, UT1, \delta\psi, \delta\epsilon, \dots) \\ \tau_2 = f_2(x_p, y_p, UT1, \delta\psi, \delta\epsilon, \dots) \\ \vdots \\ \tau_n = f_n(x_p, y_p, UT1, \delta\psi, \delta\epsilon, \dots) \end{cases}$$

On le **linéarise** par un développement de Taylor autour d’un ”point” connu $(x_p^0, y_p^0, UT1_0 - UTC, \delta\psi_0, \delta\epsilon_0, \dots)$. Ce dernier est déterminé à partir du modèle de précession-nutation en considérant la rotation uniforme, auquel on ajoute éventuellement une prédiction ou une

série d'EOP tirée d'autres observation :

$$\tau_i = f_i(x_p^0, y_p^0, \dots) + \frac{\partial f_i}{\partial x_p} \Delta x_p + \frac{\partial f_i}{\partial y_p} \Delta y_p + \dots$$

où $\Delta x_p = x_p - x_p^0$, $\Delta y_p = y_p - y_p^0$ (etc ...).

On peut ainsi écrire **le système d'équations linéarisé** sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} (x_p^0, y_p^0, UT1_0 - UTC, \delta\psi_0, \delta\epsilon_0, \dots) = \underline{\overline{A}} \begin{bmatrix} \Delta x_p \\ \Delta y_p \\ \Delta UT1 \\ \Delta\delta\psi \\ \Delta\delta\epsilon \end{bmatrix} + \vec{V}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\tau} - \vec{f}(x_p^0, y_p^0, \dots) = \underline{\overline{A}} \vec{\Delta} + \vec{V}$$

où $\vec{\tau}$ est le vecteur des observations, \vec{f} celui du modèle, alors que $\underline{\overline{A}}$ est la matrice des dérivées partielles du modèle par rapport aux paramètres à ajuster, $\vec{\Delta}$ est le vecteur des écarts de paramètres à ajuster, et \vec{V} est le vecteur des résidus.

Pour résoudre ce système d'équations linéarisé, on utilise **la méthode des moindres carrés**, qui consiste à minimiser l'écart quadratique entre les observations et le modèle. On peut démontrer que la solution au sens des moindres carrés d'un tel problème s'écrit (voir §2.3.2) :

$$\vec{\Delta} = (\underline{\overline{A}}^t \underline{\overline{A}})^{-1} \underline{\overline{A}}^t (\vec{\tau} - \vec{f}^0)$$

où $\vec{\tau}$ est le vecteur des observations et $\vec{f}^0 = \vec{f}(x_p^0, y_p^0, \dots)$.

Annexe E

Premiers termes du potentiel gravitationnel terrestre

Référons nous au §2.2 et à partir de l'équation (2.15), calculons les premiers coefficients du potentiel gravitationnel terrestre U . Pour calculer U_1 , on prend l'origine de notre repère au centre de gravité terrestre. On note M la masse de la Terre, R_e le rayon équatorial terrestre moyen et $J_2 = \frac{C-A}{M R_e^2}$ l'aplatissement terrestre, où :

$$A = \iiint_{\mathcal{V}} (Y^2 + Z^2) dM \quad (\text{E.1})$$

$$B = \iiint_{\mathcal{V}} (X^2 + Z^2) dM \quad (\text{E.2})$$

$$C = \iiint_{\mathcal{V}} (X^2 + Y^2) dM \quad (\text{E.3})$$

$$I = \iiint_{\mathcal{V}} \rho^2 dM = \frac{A+B+C}{2} \quad (\text{E.4})$$

Rappelons que (x,y,z) sont les coordonnées du satellite (de rayon vecteur \vec{r}) dans le repère terrestre et (X,Y,Z) les coordonnées de l'élément de masse terrestre dM (de rayon vecteur ρ) dans ce même repère. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{G}{r} \iiint_{\mathcal{V}} dM \\ &= \frac{G M}{r} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{G}{r} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{r} \cos \theta dM \\ &= \frac{G}{r^3} \iiint_{\mathcal{V}} (xX + yY + zZ) dM \quad , \text{ car } \cos \theta = \frac{xX + yY + zZ}{r \rho} \\ &= \frac{G}{r^3} \left(x \iiint_{\mathcal{V}} X dM + y \iiint_{\mathcal{V}} Y dM + z \iiint_{\mathcal{V}} Z dM \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Pour le coefficient U_2 , on considère une symétrie de révolution avec comme axes les axes principaux d'inertie. Dans ce cas, on a : $\int XY \, dM = \int XZ \, dM = \int YZ \, dM = 0$. Par conséquent, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
U_2 &= \frac{G}{r} \iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) dM & (E.7) \\
&= \frac{G}{r^3} \iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{3 (xX + yY + zZ)^2}{2 r^2} - \frac{1}{2} \rho^2 \right) dM \quad , \text{ car } \rho^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \\
&= \frac{G}{r^3} \left(\left(\frac{3x^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) \iiint_{\mathcal{V}} X^2 \, dM + \left(\frac{3y^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) \iiint_{\mathcal{V}} Y^2 \, dM + \left(\frac{3z^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) \iiint_{\mathcal{V}} Z^2 \, dM \right) \\
&= \frac{G}{r^3} \left(\left(\frac{3x^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) (I - A) + \left(\frac{3y^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) (I - B) + \left(\frac{3z^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) (I - C) \right) \\
&= \frac{G}{r^3} \left(\frac{1}{2}(A + B + C) - \frac{3}{2r^2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2) \right) \\
&= \frac{G}{r^3} \left(\frac{1}{2}(A + B + C) - \frac{3}{2r^2}(A r^2 \cos^2 \phi \cos^2 \lambda + B r^2 \cos^2 \phi \sin^2 \lambda + C r^2 \sin^2 \phi) \right) \\
&= \frac{G}{r^3} \left(\left(C - \frac{A+B}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \phi \right) - \frac{3}{4} (A - B) \cos^2 \phi \cos 2\lambda \right) \\
&= \frac{G}{r^3} (C - A) \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \phi \right) \quad , \text{ car pour une symétrie de révolution } A = B \\
&= -\frac{G M}{r} \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 J_2 P_2(\sin \phi)
\end{aligned}$$

Les premiers coefficients de Stokes du potentiel gravitationnel terrestre sont les suivants :

$$C_{00} = 1$$

$$S_{i0} = 0 \quad , \text{ pour } i=0,1,\dots,n$$

$$C_{10} = \frac{1}{\mathcal{M} \mathcal{R}_e} \int_{\mathcal{M}} z \, dM = 0 \quad , \text{ si l'origine est au centre des masses de la Terre}$$

$$C_{11} = \frac{1}{\mathcal{M} \mathcal{R}_e} \int_{\mathcal{M}} x \, dM = 0 \quad , \text{ idem}$$

$$S_{11} = \frac{1}{\mathcal{M} \mathcal{R}_e} \int_{\mathcal{M}} y \, dM = 0 \quad , \text{ idem}$$

Ceci nous donne notamment les composantes du centre de gravité G terrestre :

$$\begin{aligned}
x_G &= \mathcal{R}_e C_{11} \\
y_G &= \mathcal{R}_e S_{11} \\
z_G &= \mathcal{R}_e C_{10}
\end{aligned} \tag{E.8}$$

Annexe F

Eléments orbitaux d'un satellite

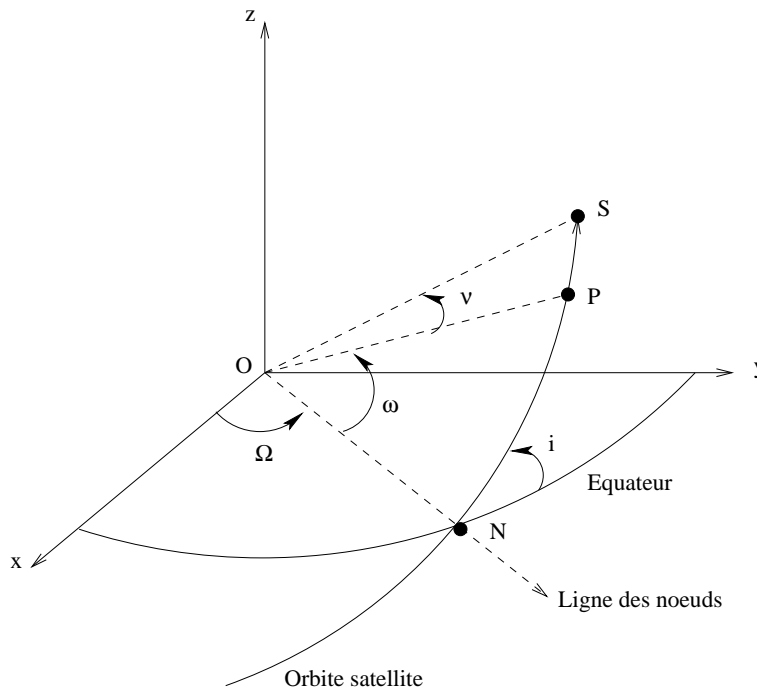


FIG. F.1 – Elements orbitaux d'un satellite S orbitant autour de la Terre (P est le périégée de l'orbite et N est le noeud ascendant de l'orbite).

a : Demi-grand axe de l'orbite

e : Excentricité de l'orbite

i : Inclinaison de l'orbite

ω : Argument de latitude du périégée P

Ω : Longitude du noeud ascendant

ν : Anomalie vraie

M : Anomalie moyenne ($M = n(t - \tau)$, où τ est l'instant de passage au périégée)

E : Anomalie excentrique (Equation de Képler : $M = E - e \sin E$)

T : Période de l'orbite du satellite

n : Moyen mouvement du satellite ($n = \frac{2\pi}{T}$)

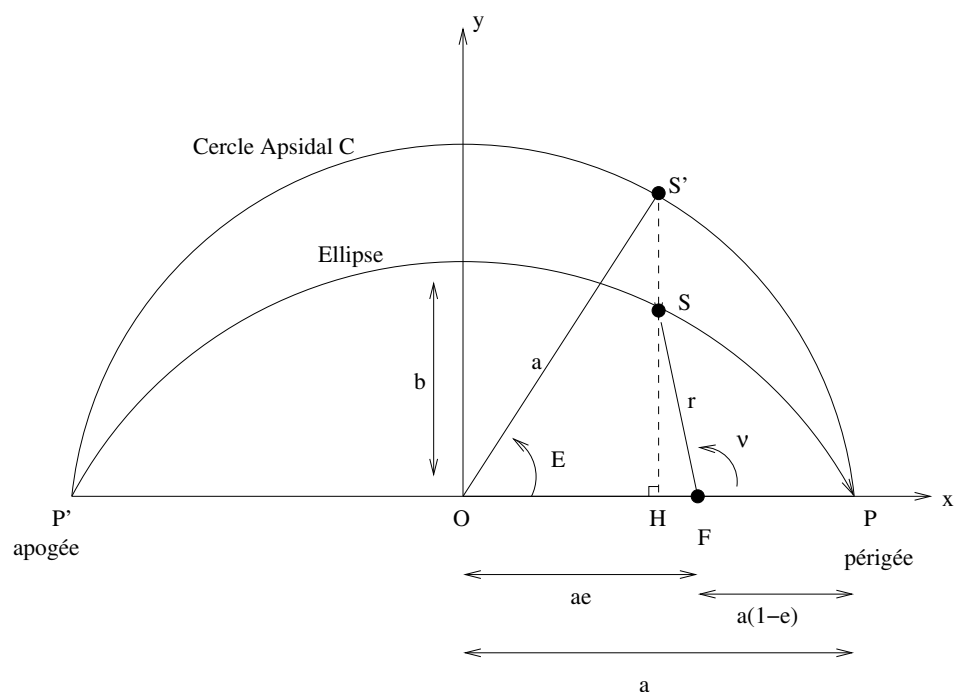


FIG. F.2 – Mouvement képlérien du satellite S sur son orbite elliptique : F est le foyer de l'ellipse et O est le centre du cercle apsidal. Notons que : $b = a \sqrt{1 - e^2}$.

Annexe G

Liens entre inertie et coefficients du potentiel de gravité terrestre

La matrice d'inertie terrestre, exprimée par rapport au repère terrestre (Oxyz) peut être définie de la manière suivante (voir Annexe B) :

$$\underline{\bar{I}} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & B + c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & C + c_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{G.1})$$

où (A, B, C) sont les moments principaux d'inertie moyens, constants dans le temps. Les incréments d'inertie c_{ij} pour $i, j = 1, 2, 3$ proviennent à la fois des redistributions de masses (partie variable) et du désalignement des axes du repère terrestre avec les axes principaux d'inertie. Pour un corps assimilé à un ellipsoïde de révolution, on considère que : $A = B$. Chacun des coefficients d'inertie est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int (y^2 + z^2) \, dM & I_{12} &= - \int xy \, dM \\ I_{22} &= \int (x^2 + z^2) \, dM & I_{23} &= - \int yz \, dM \\ I_{33} &= \int (x^2 + y^2) \, dM & I_{13} &= - \int xz \, dM \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

Les coefficients de Stokes de degré deux peuvent alors être définis de la manière suivante (voir §2.4, Eq. (G.2) et Fig. G.1) :

$$\begin{aligned} C_{20} &= \frac{1}{2 MR_e^2} \int r^2 (3 \sin^2 \phi - 1) \, dM \\ &= \frac{1}{2 MR_e^2} \int (3(r \sin \phi)^2 - r^2) \, dM \\ &= \frac{1}{2 MR_e^2} \int (3z^2 - r^2) \, dM \\ &= \frac{1}{2 MR_e^2} \int (2z^2 - x^2 - y^2) \, dM \\ &= \frac{1}{2 MR_e^2} [-I_{33} + (I_{11} + I_{22} - I_{33})] \\ &= \frac{1}{MR_e^2} \left[-I_{33} + \frac{I_{11} + I_{22}}{2} \right] \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

De plus :

$$\begin{aligned}
C_{21} &= \frac{1}{MR_e^2} \int r^2 \sin \phi \cos \phi \cos \lambda \, dM & S_{21} &= \frac{1}{MR_e^2} \int r^2 \sin \phi \cos \phi \sin \lambda \, dM \\
&= \frac{1}{MR_e^2} \int (r \cos \phi \cos \lambda)(r \sin \phi) \, dM & &= \frac{1}{MR_e^2} \int (r \cos \phi \sin \lambda)(r \sin \phi) \, dM \\
&= \frac{1}{MR_e^2} \int xz \, dM & &= \frac{1}{MR_e^2} \int yz \, dM \\
&= -\frac{I_{13}}{MR_e^2} \quad (a) & &= -\frac{I_{23}}{MR_e^2} \quad (b) \quad (G.3 \text{ bis})
\end{aligned}$$

Et enfin :

$$\begin{aligned}
C_{22} &= \frac{1}{4 MR_e^2} \int r^2 \cos^2 \phi \cos(2\lambda) \, dM \\
&= \frac{1}{4 MR_e^2} \int (r \cos \phi)^2 (\cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda) \, dM \\
&= \frac{1}{4 MR_e^2} \int [(r \cos \phi \cos \lambda)^2 - (r \cos \phi \sin \lambda)^2] \\
&= \frac{1}{4 MR_e^2} \int (x^2 - y^2) \, dM \\
&= \frac{I_{22} - I_{11}}{4 MR_e^2} \quad (G.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{22} &= \frac{1}{4 MR_e^2} \int r^2 \cos^2 \phi \sin(2\lambda) \, dM \\
&= \frac{1}{4 MR_e^2} \int (r \cos \phi)^2 (2 \sin \lambda \cos \lambda) \, dM \\
&= \frac{1}{2 MR_e^2} \int (r \cos \phi \cos \lambda)(r \cos \phi \sin \lambda) \, dM \\
&= \frac{1}{2 MR_e^2} \int xy \, dM \\
&= -\frac{I_{12}}{2 MR_e^2} \quad (G.5)
\end{aligned}$$

Nous pouvons également écrire les coefficients de la matrice d'inertie en fonction des coefficients harmoniques sphériques de degré 2 du potentiel gravitationnel terrestre :

$$\begin{aligned}
I_{12} &= -2 M R_e^2 S_{22} \quad (\text{voir Eq. (G.5)}) \quad (G.6) \\
&= -\sqrt{\frac{5}{3}} M R_e^2 \bar{S}_{22} \quad (\text{voir Table 2.2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{13} &= -M R_e^2 C_{21} \quad (\text{voir Eq. (G.3 bis (a))}) \quad (G.7) \\
&= -\sqrt{\frac{5}{3}} M R_e^2 \bar{C}_{21} \quad (\text{voir Table 2.2})
\end{aligned}$$

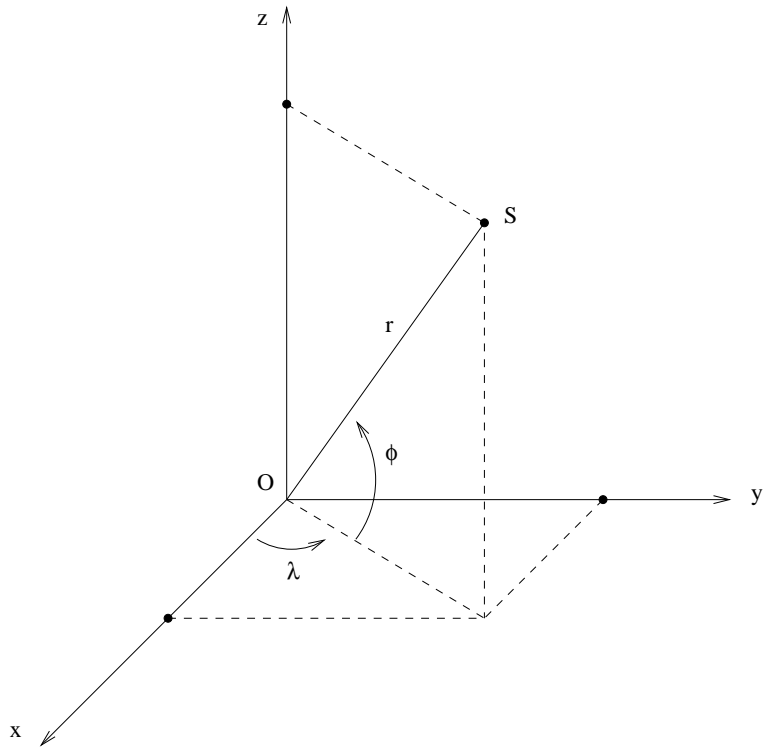


FIG. G.1 – Coordonnées sphériques du point S dans le repère (x,y,z). Ses coordonnées polaires sont alors : $x = r \cos \phi \cos \lambda$, $y = r \cos \phi \sin \lambda$, $z = r \sin \phi$, et donc $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

$$\begin{aligned}
 I_{23} &= -M R_e^2 S_{21} && \text{(voir Eq. (G.3 bis (b)))} && (G.8) \\
 &= -\sqrt{\frac{5}{3}} M R_e^2 \bar{S}_{21} && \text{(voir Table 2.2)}
 \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
 I_{22} - I_{11} &= 4 M R_e^2 C_{22} && (1) && \text{voir Eq.(G.4)} \\
 I_{33} - \frac{I_{11} + I_{22}}{2} &= -M R_e^2 C_{20} && (2) && \text{voir Eq.(G.3)} \\
 I_{11} + I_{22} + I_{33} &= Tr(I) && (3)
 \end{aligned}$$

Par conséquent, ce système d'équations équivaut à :

$$I_{11} = I_{22} - 4 M R_e^2 C_{22} \quad (1)$$

$$I_{33} = I_{22} - 2 M R_e^2 C_{22} - M R_e^2 C_{20} \quad (2)$$

$$2 I_{22} - 4 M R_e^2 C_{22} + I_{22} - 2 M R_e^2 C_{22} - M R_e^2 C_{20} = Tr(I) \quad (3)$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{1}{3} Tr(I) - 2 M R_e^2 C_{22} + \frac{1}{3} M R_e^2 C_{20} \\
&= \frac{1}{3} Tr(I) - \sqrt{\frac{5}{3}} M R_e^2 \bar{C}_{22} + \frac{\sqrt{5}}{3} M R_e^2 \bar{C}_{20}
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
I_{22} &= \frac{1}{3} Tr(I) + 2 M R_e^2 C_{22} + \frac{1}{3} M R_e^2 C_{20} \\
&= \frac{1}{3} Tr(I) + \sqrt{\frac{5}{3}} M R_e^2 \bar{C}_{22} + \frac{\sqrt{5}}{3} M R_e^2 \bar{C}_{20}
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
I_{33} &= \frac{1}{3} Tr(I) - \frac{2}{3} M R_e^2 C_{20} \\
&= \frac{1}{3} Tr(I) - \frac{2}{3} \sqrt{5} M R_e^2 \bar{C}_{20}
\end{aligned} \tag{2}$$

Annexe H

Ellipticité dynamique

Il faut bien différencier les deux notions assez proches, mais bien distinctes, suivantes : (i) l'ellipticité géométrique, et (ii) l'ellipticité dynamique, que l'on notera respectivement ϵ et H . L'ellipticité géométrique terrestre ϵ est définie en fonction des rayons équatorial et polaire de la Terre (notés respectivement R_e et R_p). Quant à l'ellipticité dynamique, elle fait appel aux moments principaux d'inertie de la Terre. Ces deux quantités s'écrivent de la manière suivante :

$$\epsilon = \frac{R_e - R_p}{R_e} \quad (\text{H.1})$$

$$H = \frac{C - (A + B)/2}{C} \quad (\text{H.2})$$

où A et B sont les moments principaux d'inertie équatoriaux, et C le moment principal d'inertie polaire de la Terre (voir Annexe B).

Notons que les géophysiciens adoptent une autre définition de l'ellipticité dynamique, notée e , et donnée par :

$$e = \frac{C - (A + B)/2}{(A + B)/2} \quad (\text{H.3})$$

Cette dernière peut alors être reliée à H comme suit :

$$H = \frac{e}{1 + e} \quad (\text{H.4})$$

L'expression (H.2) de H peut s'écrire en fonction du coefficient J_2 de degré 2 et d'ordre 0 du potentiel de gravité terrestre défini par Eq. (G.3) :

$$J_2 = -C_{20} = -\sqrt{5} \bar{C}_{20} \quad \text{voir Eq. (2.5) et Table 2.2} \quad (\text{H.5})$$

$$H = \left(C - \frac{A + B}{2} \right) / C = \frac{M R_e^2}{C} J_2 \quad (\text{H.6})$$

où M est la masse de la Terre et R_e son rayon équatorial.

Annexe I

Méthode d'intégration numérique d'Encke dans le logiciel GINS

Incrémentation de l'orbite moyenne pour la méthode d'Encke

Grâce à la sous-routine "*encke.f90*" dans le logiciel d'orbitographie GINS du GRGS/CNES, on transforme les éléments képlériens initiaux $(\tilde{a}_0, \tilde{e}_0, \tilde{i}_0, \tilde{\Omega}_0, \tilde{\omega}_0, \tilde{M}_0)$ de l'orbite analytique de référence, en éléments rectangulaires $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}, \dot{\tilde{z}})$ relatifs à la Terre à l'instant t .

Tout d'abord, ces éléments orbitaux initiaux (i.e. à l'instant t_0) sont propagés le long de l'orbite de référence (i.e. à chaque instant t), de la manière suivante :

$$\begin{aligned} dt &= t - t_0 \\ \tilde{a} &= \tilde{a}_0 \\ \tilde{e} &= \tilde{e}_0 \\ \tilde{i} &= \tilde{i}_0 \\ \tilde{\Omega} &= \tilde{\Omega}_0 + \dot{\tilde{\Omega}}_0 dt \\ \tilde{\omega} &= \tilde{\omega}_0 + \dot{\tilde{\omega}}_0 dt \\ \tilde{M} &= \tilde{M}_0 + \dot{\tilde{M}}_0 dt \end{aligned} \tag{I.1}$$

Ensuite, pour transformer ces éléments $(\tilde{a}, \tilde{e}, \tilde{i}, \tilde{\Omega}, \tilde{\omega}, \tilde{M})$ de l'orbite analytique de référence à l'instant t , en éléments rectangulaires, on applique les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \tilde{M} + \tilde{e} \tilde{E} \\ \tilde{r} &= \tilde{a} (1 - \tilde{e} \cos \tilde{E}) \\ \tilde{X} &= \tilde{a} (\cos \tilde{E} - \tilde{e}) \\ \tilde{Y} &= \tilde{a} \sqrt{1 - \tilde{e}^2} \sin \tilde{E} \\ \dot{\tilde{X}} &= -\tilde{a} \sin \tilde{E} \frac{n}{1 - \tilde{e} \cos \tilde{E}} \\ \dot{\tilde{Y}} &= \tilde{a} \sqrt{1 - \tilde{e}^2} \cos \tilde{E} \frac{n}{1 - \tilde{e} \cos \tilde{E}} \end{aligned} \tag{I.2}$$

Par la matrice \mathcal{M} de changement de base (passage du repère orbital au repère terrestre), on obtient ensuite les éléments rectangulaires de l'orbite de référence, relativement à la Terre. Ainsi, si on écrit :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} P_x & Q_x & W_x \\ P_y & Q_y & W_y \\ P_z & Q_z & W_z \end{bmatrix} \tag{I.3}$$

avec :

$$\begin{cases} P_x = \cos \tilde{\Omega} \cos \tilde{\omega} - \sin \tilde{\Omega} \cos \tilde{i} \sin \tilde{\omega} \\ P_y = \sin \tilde{\Omega} \cos \tilde{\omega} + \cos \tilde{\Omega} \cos \tilde{i} \sin \tilde{\omega} \\ P_z = \sin \tilde{i} \sin \tilde{\omega} \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

$$\begin{cases} Q_x = -\cos \tilde{\Omega} \sin \tilde{\omega} - \sin \tilde{\Omega} \cos \tilde{i} \cos \tilde{\omega} \\ Q_y = -\sin \tilde{\Omega} \sin \tilde{\omega} + \cos \tilde{\Omega} \cos \tilde{i} \cos \tilde{\omega} \\ Q_z = \sin \tilde{i} \cos \tilde{\omega} \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

On peut alors obtenir :

$$\begin{cases} \tilde{x} = P_x \tilde{X} + Q_x \tilde{Y} \\ \tilde{y} = P_y \tilde{X} + Q_y \tilde{Y} \\ \tilde{z} = P_z \tilde{X} + Q_z \tilde{Y} \\ \dot{\tilde{x}} = P_x \dot{\tilde{X}} + Q_x \dot{\tilde{Y}} + \dot{P}_x \tilde{X} + \dot{Q}_x \tilde{Y} \\ \dot{\tilde{y}} = P_y \dot{\tilde{X}} + Q_y \dot{\tilde{Y}} + \dot{P}_y \tilde{X} + \dot{Q}_y \tilde{Y} \\ \dot{\tilde{z}} = P_z \dot{\tilde{X}} + Q_z \dot{\tilde{Y}} + \dot{P}_z \tilde{X} + \dot{Q}_z \tilde{Y} \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

avec :

$$\begin{cases} \dot{P}_x = -\dot{\tilde{\Omega}} P_y + \dot{\tilde{\omega}} Q_x \\ \dot{P}_y = \dot{\tilde{\Omega}} P_x + \dot{\tilde{\omega}} Q_y \\ \dot{P}_z = \dot{\tilde{\omega}} Q_z \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

$$\begin{cases} \dot{Q}_x = -\dot{\tilde{\Omega}} Q_y - \dot{\tilde{\omega}} P_x \\ \dot{Q}_y = \dot{\tilde{\Omega}} Q_x - \dot{\tilde{\omega}} P_y \\ \dot{Q}_z = -\dot{\tilde{\omega}} P_z \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

Calcul de la différence entre l'orbite vraie et l'orbite de référence, à chaque instant t

On calcule le bulletin de l'orbite analytique de référence pour l'instant initial t_0 (avec la méthode d'Aksnes citée au §6.4), puis on propage cette orbite grâce aux équations (I.1). On s'intéresse au vecteur différence $\vec{r} - \vec{r}$ entre orbite vraie et orbite de référence (qui n'est en fait qu'une ellipse en précession). Grâce aux équations (6.43) on intègre ce vecteur différence, par une intégration numérique de Cowell (voir Fig. I.1). Au final, on peut restituer l'orbite vraie sur la base de la connaissance de l'orbite de référence et de la différence calculée.

Cette intégration numérique est différente de la méthode classique de Cowell par la considération du vecteur $\vec{r} - \vec{r}$, vecteur différence entre l'orbite *vraie* et l'orbite *de référence*. Ceci entraîne aussi un changement dans les seconds membres des équations du mouvement, comme nous l'avons vu dans l'équation (6.34) :

- le vecteur $\vec{\rho}_{ref}$, accélération *complémentaire* pour l'orbite analytique de référence, est calculé dans la subroutine "*encke.f90*",
- les forces $\Delta \vec{F}$ pour l'orbite *vraie* sont calculées dans la subroutine "*seconm.f90*",
- la partie \vec{D} de ce second membre est calculée dans la subroutine "*rencke.f90*" appelée dans la subroutine "*seconm.f90*".

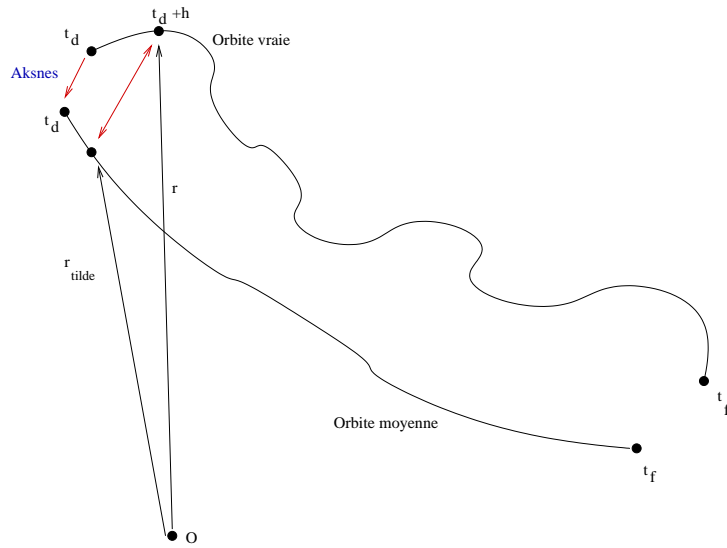


FIG. I.1 – Méthode d'Encke : on s'intéresse à $\vec{r} - \vec{r}_0$, que l'on propage par intégration numérique de Cowell.

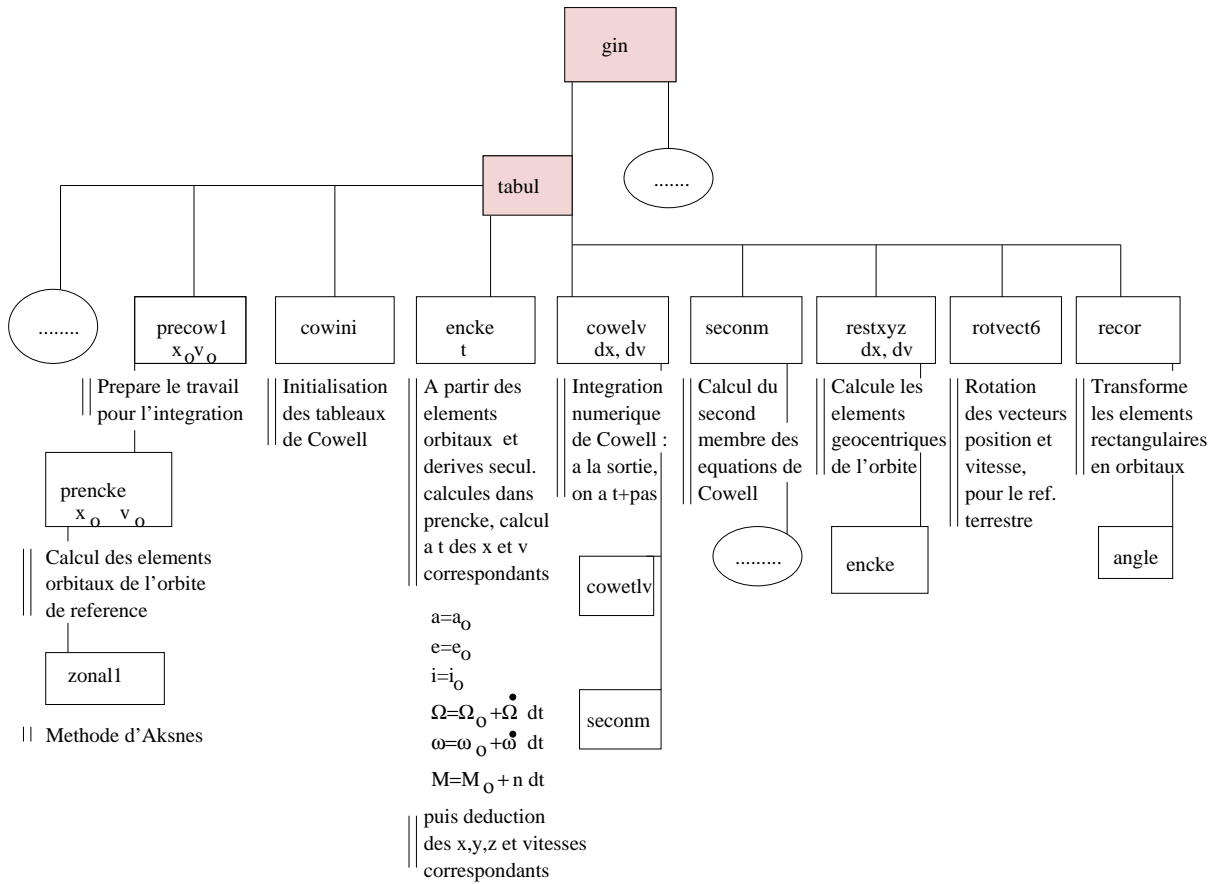


FIG. I.2 – Arborescence pour l'integration numérique avec la méthode d'encke pour le calcul d'orbite dans le logiciel GINS (les noms des sousroutines et programmes sont écrits ici sans l'extension ".f90").

Annexe J

Abbreviations

AAM	Atmospheric Angular Momentum
BDL	Bureau des longitudes
BGI	Bureau Gravimétrique International
BIPM	Bureau International des Poids et Mesures
CEP	Celestial Ephemeris Pole (Pôle céleste des éphémérides)
CERGA	Centre d'Etudes et de Recherches Géodynamiques et Astronomiques
CIP	Celestial Intermediate Pole (Pôle céleste intermédiaire)
CNES	Centre National d'Etudes Spatiales
CRF	Celestial Reference Frame
CRS	Celestial Reference System
DORIS	Détermination d'orbites et de Radiopositionnement Intégrés par Satellite
EOP	Earth Orientation Parameters
ECMWF	European Center for Meteorological Weather Forecast
ESA	European Space Agency
FCN	Free Core Nutation
FICN	Free Inner Core Nutation
GFZ	GeoForschungsZentrum
GST	Greenwich sidereal time
GMST	Greenwich Mean sidereal time
GPS	Global Positioning System
GRGS	Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale
GSFC	Goddard Space Flight Center
IAG	International Association of Geodesy
IAU/UAI	International Astronomical Union
ICRF	International Celestial Reference Frame
ICRS	International Celestial Reference System
IDS	International DORIS Service
IERS	International Earth Rotation and Reference Systems Service
IGS	International GPS Service
ILRS	International Laser Ranging Service
IMCCE	Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides
ITRF	International Terrestrial Reference Frame
ITRS	International Terrestrial Reference System
IVS	International VLBI Service
IUGG/UGGI	International Union of Geodesy and Geophysics

JPL	Jet Propulsion Laboratory
LAGEOS	LAser GEOdynamics Satellite
LLR	Lunar Laser Ranging
mas	milliarcsecond (milliseconde de degré : 0.001")
μ as	microarcsecond (microseconde de degré : 10^{-6} ")
mjd/MJD	Modified Julian Day
ms	milliseconde de temps
NASA	National Aeronautics and Space Administration
NRO	Non Rotationg Origin
OCA	Observatoire de la Côte d'Azur
PREM	Preliminary Reference Earth Model
SLR	Satellite Laser Ranging
TAI	Temps Atomique International
TRF	Terrestrial Reference Frame
TRS	Terrestrial Reference System
UAI	Union Astronomique International
USNO	US Naval Observatory
UTC	Universal Time Coordinated
VLBI	Very Long Baseline Interferometry

Bibliographie

- [1] Aksnes, K., 1970, "A Second-Order Artificial Satellite Theory Based on an Intermediate Orbit", *Astron. J.*, **75** (9), pp. 1066–1076.
- [2] Balmino, G., 1974, "Numerical Methods of Orbital Dynamics", *Satellite Dynamics*, COSPAR-IAU-IUTAM Symp.
- [3] Balmino, G., 1994, communication privée sur les équations utilisées dans la méthode d'Encke.
- [4] Barnes, R. T. H., Hide, R., White, A. A., and Wilson, C. A., 1983, "Atmospheric angular momentum fluctuations, length-of-day changes and polar motion", *Proc. R. Soc. Lond.*, **A 387**, pp. 31–73.
- [5] Barriot, J.-P., 1989, "Méthodes d'Intégration Numérique de Cowell, Systèmes du Premier et Deuxième Ordre, Théorie et Mise en Oeuvre", Technical report, Bureau Gravimétrique International.
- [6] Biancale, R., Balmino, G., Lemoine, J.-M., Marty, J.-C., et al., 2000, "A new global Earth's gravity field model from satellite orbit perturbations : GRIM5-S1", *Geophys. Res. Lett.*, **27**, pp. 3611–3614.
- [7] Biancale, R., Lemoine, J.-M., Loyer, S., Marty, J.-C., and Perosanz, F., 2002, communication privée sur les données de C_{20} issues de GRIM5.
- [8] Biancale, R., and Lemoine, J.-M., 2004, communication privée sur les données de C_{20} issues de la redétermination du champ de gravité avec des données de Lageos I et II.
- [9] Bianco, G., Devoti, R., Fermi, M., Luceri, V., Rutigliano, P., and Sciarretta, C., 1998, "Estimation of low-degree geopotential coefficients using SLR data", *Planet. Space Sci.*, **46**, pp. 1633–1638.
- [10] Bourda, G., and Capitaine, N., 2004, "Precession, Nutation, and space geodetic determination of the Earth's variable gravity field", *Astron. Astrophys.*, in press.
- [11] Bretagnon, P., Rocher, P., and Simon, J.-L., 1997, "Theory of the rotation of the rigid Earth", *Astron. Astrophys.*, **319**, pp. 305–317.
- [12] Bretagnon, P., Fienga, A., and Simon, J.-L., 2003, "Expressions for precession consistent with the IAU 200A model - Considerations about the ecliptic and the Earth Orientation Parameters", *Astron. Astrophys.*, **400**, pp. 785–790.
- [13] Brouwer, D., 1959, "Solution of the Problem of Artificial Satellite Theory without Drag", *Astron. J.*, **64** (1274), pp. 378–397.
- [14] Brzeziński, A., and Capitaine, N., 1993, "The use of the precise observations of the Celestial Ephemeris Pole in the analysis of geophysical excitation of Earth rotation", *J. Geophys. Res.*, **98**, B4, pp. 6667–6675.

- [15] Bursa, M., Kouba, J., Radej, K., True, S.A., Vatr, V., Vojtiskova, M., 1998, "Mean earth's equipotential surface from Topex/Poseidon altimetry", *Studia geoph. et geod.*, **42**, pp. 459–466.
- [16] Capitaine, N., 1982, "Effets de la non-rigidité de la Terre sur son mouvement de rotation : étude théorique et utilisation d'observations", Thèse de Doctorat d'état, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, France.
- [17] Capitaine, N., 1990, "The Celestial Pole Coordinates", *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, **48**, pp. 127–143.
- [18] Capitaine, N., Guinot, B., and McCarthy, D. D., 2000, "Definition of the Celestial Ephemeris origin and of UT1 in the International Reference Frame," *Astron. Astrophys.*, **355**, pp. 398–405.
- [19] Capitaine, N., Wallace, P. T., and Chapront, J., 2003, "Expressions for the IAU 2000 precession quantities", *Astron. Astrophys.*, **412**, pp. 567–586.
- [20] Cazenave, A., Gegout, P., Ferhat, G., and Biancale, R., 1995, "Temporal variations of the gravity field from LAGEOS I and LAGEOS II observations", *Global Gravity Field and its Temporal Variations*, Int. Assoc. Geod. Symp. series, **116**, Springer-Verlag, New-York, pp. 141–151.
- [21] Cazenave, A., and Nerem, R. S., 2002, "Redistributing Earth's mass", *Science*, **297**, pp. 783–784.
- [22] Chao, B. F., and Gross, R. S., 1987, "Changes in the Earth's rotation and low-degree gravitational field induced by earthquakes", *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **91**, pp. 569–596.
- [23] Chao, B. F., and Au, A. Y., 1991, "Temporal variation of the earth's low-degree zonal gravitational field caused by atmospheric mass redistribution - 1980-1988", *J. Geophys. Res.*, **96**, pp. 6569–6575.
- [24] Chao, B. F., 1994, "The Geoid and Earth Rotation", *Geoid and its Geophysical Interpretation*, CRC Press Inc., edited by Vanicek, P. and Christou, N. T., pp. 285–298.
- [25] Chao, B. F., and Eanes, R. J., 1995, "Global gravitational changes due to atmospheric mass redistribution as observed by Lageos nodal residual", *Geophys. J. Int.*, **122**, pp. 755–764.
- [26] Chambers, D. P., Wahr, J., and Nerem, R. S., 2004, "Preliminary observations of global ocean mass variations with GRACE", *Geophys. Res. Lett.*, **31**, 10.1029/2004GL020461.
- [27] Chapront, J., 2003, "Gregoire software", Notice, Paris Observatory.
- [28] Cheng, M. K., Eanes, R. J., Shum, C. K., Schutz, B. E., and Tapley, B. D., 1989, "Temporal variation in low-degree zonal harmonics from Starlette orbit analysis", *Geophys. J. R.*, **16**, pp. 393–396.
- [29] Cheng, M., and Tapley, B. D., 1999, "Seasonal Variations in low-degree zonal harmonics of the Earth's gravity field from satellite laser ranging observations", *J. Geophys. Res.*, **104**, pp. 2667–2681.
- [30] Cox, C. M., and Chao, B., 2002, "Detection of a Large-Scale Mass Redistribution in the Terrestrial System Since 1998", *Science*, **297**, pp. 831–833.

- [31] Dehant, V., and Capitaine, N., 1997, "On the precession constant : values and constraints on the dynamical ellipticity; link with Oppolzer terms and tilt-over-mode", *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, **65**, pp. 439–458.
- [32] Dehant, V., Arias, F., Bizouard, C., Bretagnon, et al., 1999, "Considerations concerning the non-rigid Earth Nutation Theory", *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, **72**, pp. 245–310.
- [33] De Viron, O., 2004, Communication privée.
- [34] Dickey, J. O., Marcus, S. L., De Viron, O., and Fukumori, I., 2002, "Recent Earth Oblateness Variations : Unraveling Climate and Postglacial Rebound Effects", *Science*, **298**, pp. 1975–1977.
- [35] Eanes, R. J., and Bettapudur, S. V., 1995, "Temporal variability of Earth's gravitational field from satellite laser ranging", *Global Gravity Field and its Temporal Variations*, Int. Assoc. Geod. Symp. series, **116**, Springer-Verlag, New-York, pp. 30–41.
- [36] Farrell, W.E., 1972, "Deformation of the Earth by surface loads", *Review of Geophys. Space Physics*, **10**, pp. 761–797 .
- [37] Fukushima, T., 2003, "A new precession formula", *Astr. J.*, **126**, pp. 494–534.
- [38] Gegout, P., and Cazenave, A., 1993a, "Geodynamic parameters derived from 7 years of laser data on Lageos", *Geophys. Res. Let.*, **18**, pp. 1739–1742.
- [39] Gegout, P., and Cazenave, A., 1993b, "Temporal Variations of the Earth Gravity Field for 1985–1989 derived from Lageos", *Geophys. J. Int.*, **114**, pp. 347–359.
- [40] Gegout, P., 1995, "De la variabilité de la rotation de la terre et du champ de gravité, conséquence aux dynamiques de l'Atmosphère et des Océans", Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg 1, France.
- [41] Gross, R. S., 2000, "Gravity, Oceanic Angular Momentum and the Earth's Rotation", *Gravity, Geoid and Geodynamics 2000*, IAG Symposium 123, Sideris (eds.), Springer Verlag Berlin Heidelberg, pp. 153–158.
- [42] Gross, R. S., Fukumori, I., and Menemenlis, D., 2003, "Atmospheric and Oceanic Excitation of the Earth's Wobbles During 1980–2000", *J. Geophys. Res.*, **108**, **B8**, 2370, 10.1029/2002JB002143.
- [43] Gross, R. S., Fukumori, I., Menemenlis, D., and Gegout, P., 2004, "Atmospheric and Oceanic Excitation of Length-of-Day Variations During 1980–2000", *J. Geophys. Res.*, **109**, 10.1029/2003JB0022432.
- [44] Groten, 1999, IAG Report, *IERS Technical Note*, "Parameters of Common Relevance of Astronomy, Geodesy, and Geodynamics".
- [45] Gruber, T., Bode, A., Reigber, C., Schwintzer, P., et al., 2000, "GRIM5-C1 : Combination solution of the global gravity field to degree and order 120", *Geophys. Res. Let.*, **27**, pp. 4005–4008.
- [46] Guinot, B., 1979, "Basic Problems in the Kinematics of the Rotation of the Earth", in *Time and the Earth's Rotation*, McCarthy, D. D. and Pilkington, J. D. (eds.), D. Reidel Publishing Company, pp. 7–18.
- [47] Jeongrae, K., 2000, "Simulation Study of a Low-Low Satellite-to-Satellite Tracking Mission", Thèse de Doctorat, University of Texas, Austin, USA.

- [48] Johnson, T. J., Wilson, C. R., and Chao, B. F., 1999, "Oceanic angular momentum variability estimated from the Parallel Ocean Climate Model, 1988-1998," *J. Geophys. Res.*, **104**, B11, 25,183–25,196.
- [49] Kalnay, E., 1996, "The NCEP/NCAR 40-year Reanalysis Project", *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **77**, pp. 437–441.
- [50] Kinoshita, H., 1977, "Theory of the Rotation of the Rigid Earth", *Celest. Mech.*, **15**, pp. 277–236.
- [51] Kinoshita, H., Nakajima, K., Kubo, Y., Nakagawa, I., Sasao, T., and Yokoyama, K., 1979, "Note on nutation in ephemerides", *Publ. Int. Latitude Obs. Mizusawa*, **12**, pp. 71–108.
- [52] Lambeck, K., 1980, "The Earth's variable rotation : Geophysical causes and consequences", Cambridge University Press.
- [53] Lambeck, K., 1988, "Geophysical Geodesy : The Slow Deformations of the Earth", Oxford Science Publications.
- [54] Lambert, S., 2003, communication privée.
- [55] Lambert, S., and Capitaine, N., 2004, "Influence of zonal deformations and Earth's rotation rate variations variations on precession-nutation", *Astron. Astrophys.*, in press.
- [56] Lemoine, J.-M., Biancale, R., and Bourda, G., 2004, "Processing of 18.6 years of Lageos data", 14th International Laser Ranging Workshop, San Fernando.
- [57] Levallois, J. J., 1970, "Géodésie générale : Le champ de la pesanteur", **3**, Editions Eyrolles.
- [58] Levallois, J. J., and Kovalevsky, J., 1971, "Géodésie générale : Géodésie spatiale", **4**, Editions Eyrolles.
- [59] Lieske, J. H., Lederle, T., Fricke, W., and Morando, B., 1977, "Expression for the Precession Quantities Based upon the IAU (1976) System of Astronomical Constants", *Astron. Astrophys.*, **58**, pp. 1–16.
- [60] Mathews, P. M., Herring, T. A., and Buffett, B. A., 2002, "Modeling of nutation-precession : New nutation series for nonrigid Earth, and insights into the Earth's Interior", *J. Geophys. Res.*, **107**, B4, 10.1029/2001JB000390.
- [61] McCarthy, D. D., 1996, IERS Conventions, *IERS Technical Note*, **21**, Observatoire de Paris, Paris.
- [62] McCarthy, D. D., Petit, G., 2003, IERS Conventions, *IERS Technical Note*, **32**, Frankfurt am Main : Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, paperback, in print.
- [63] Morrison, L., and Stephenson, R., 1997, "Contemporary geophysics from babylonian clay tablets", *Contemporary Physics*, **38**, pp. 1–13.
- [64] Melchior, P., 1971, "Physique et dynamique planétaires : Gravimétrie, Potentiel gravitationnel de la Terre et de la Lune", **2**, Vander.
- [65] Melchior, P., 1972, "Physique et dynamique planétaires : Géodynamique", **3**, Vander.
- [66] Munk, W. H., and McDonald, G., 1960, "The rotation of the Earth", Cambridge University Press.

- [67] Nerem, R. S., Chao, B. F., Au, A. Y., Chan, J. C., Klosko, S. M., Pavlis, N. K., and Williamson, R. G., 1993, "Temporal Variations of the Earth's Gravitational Field from Satellite Laser Ranging to Lageos", *Geophys. Res. Let.*, **20**, pp. 595–598.
- [68] Nerem, R. S., and Klosko, S. M., 1995, "Secular variations of the zonal harmonics and polar motion as geophysical constraints", *Global Gravity Field and its Temporal Variations*, Int. Assoc. Geod. Symp. series, **116**, Springer-Verlag, New-York, pp. –.
- [69] Pelat, D., 2000, "Bruits et Signaux", support de cours de l'Ecole Doctorale d'Astronomie et d'Astrophysique d'Ile-de-France.
- [70] Perosanz, F., Loyer, S., Lemoine, J.M., Biancale, R., Bruinsma, S., Vales, N., 2003, "CHAMP accelerometer evaluation on two years of mission", EGS - AGU - EUG Joint Assembly (Nice, France).
- [71] Ponte, R. M., Stammer, D., and Marshall, J., 1998, "Oceanic signals in observed motions of the Earth's pole of rotation," *Nature*, **391**, pp. 476–479.
- [72] Ramillien, G., Cazenave, A., and Brunau, O., 2004, "Global time variations of hydrological signals from GRACE satellite gravimetry", *Geophys. J. Int.*, **158**, pp. 813–826.
- [73] Reigber, Ch., Luehr, H., and Schwintzer, P., 2002a, "CHAMP Mission Status", *Advances in Space Research*, **30(2)**, pp. 129–134.
- [74] Reigber, Ch., Balmino, G., Schwintzer, P., Biancale, R., et al., 2002b, "A high quality global gravity field model from CHAMP GPS tracking data and Accelerometry (EIGEN-1S)", *Geophys. Res. Let.*, **29(14)**, 10.1029/2002GL015064.
- [75] Reigber, Ch., Schwintzer, P., Neumayer, K.-H., et al., 2003, "The CHAMP-only Earth gravity field model EIGEN-2", *Advances in Space Research*, **31(8)**, pp. 1883–1888.
- [76] Reigber, Ch., Jochmann, H., Wünsch, J., Petrovic, S., Schwintzer, P., Barthelmes, F., Neumayer, K.-H., König, R., Förste, Ch., Balmino, G., Biancale, R., Lemoine, J.-M., Loyer, S., and Perosanz, F., 2004a, "Earth Gravity Field and Seasonal Variability from CHAMP", in Reigber, Ch., Lühr, H., Schwintzer, P., Wickert, J. (eds.), *Earth Observation with CHAMP - Results from Three Years in Orbit*, Springer, Berlin, 25–30.
- [77] Reigber, Ch., Schmidt, R., Flechtner, F., König, R., Meyer, U., Neumayer, K.-H., Schwintzer, P., and Zhu, S. Y., 2004b, "An Earth gravity field model complete to degree and order 150 from GRACE : EIGEN-GRACE02S", *Journal of Geodynamics*, in press.
- [78] Rochester, M. G., and Smylie, D. E., 1974, "On changes in the trace of the Earth's inertia tensor", *J. Geophys. Res.*, , pp. 4948–4951.
- [79] Rubincam, D. P., 1984, "Postglacial Rebound Observed by Lageos and the Effective Viscosity of the Lower Mantle", *J. Geophys. Res.*, **89**, pp. 1077–1087.
- [80] Salstein, D. A., Kann, D. M., Miller, A. J., and Rosen, R. D., 1993, "The Sub-Bureau for Atmospheric Angular Momentum of the International Earth Rotation Service : a meteorological data center with geodetic applications", *Bull. Amer. Meteorol. Soc.*, **74**, pp. 64–80.
- [81] Salstein, D.A., Rosen, R.D., 1997, "Global momentum and energy signals from reanalysis systems", Preprints, 7th Conf. on Climate Variations, American Meteorological Society, Boston, MA, pp. 344–348.

- [82] Sasao, T., Okubo, S., and Saito, M., 1980, "A simple theory on the dynamical effects of a stratified fluid core upon nutational motion of the Earth," *Proc. of IAU Symposium 78*, edited by E. P. Federov, M. L. Smith, and P. L. Bender, D. Reidel, Hingham, Mass., pp. 165–183.
- [83] Seidelmann, P. K., 1982, "1980 IAU Nutation : The Final Report of the IAU Working Group on Nutation," *Celest. Mech.*, **27**, pp. 79–106.
- [84] Schutz, B. E., Cheng, M. K., Eanes, R. J., Shum, C. K., and Tapley, B. D., 1993, "Geodynamics Results from Starlette Orbit Analysis", *Contributions of Spaces Geodesy to Geodynamics : Earth Dynamics*, Geodynamics series 24, AGU, Washington D.C., pp. 175–190.
- [85] Souchay, J., and Kinoshita, H., 1996, "Corrections and new developments in rigid earth nutation theory I - Lunisolar influence including indirect planetary effects", *Astron. Astrophys.*, **312**, pp. 1017–1030.
- [86] Souchay, J., and Folgueira, M., 1999, "The effect of zonal tides on the dynamical ellipticity of the Earth and its influence on the nutation", *Earth, Moon and Planets*, **81**, pp. 201–216.
- [87] Tapley, B. D., Schutz, B. E., Eanes, R. J., Ries, J. C., and Watkins, M. M., 1993, "Lageos Laser Ranging Contributions to Geodynamics, Geodesy, and Orbital Dynamics", *Contributions of Spaces Geodesy to Geodynamics : Earth Dynamics*, Geodynamics series 24, AGU, Washington D.C., pp. 147–173.
- [88] Tapley, B. D., Bettapdur, S., Watkins, M., and Reigber, Ch., 2004a, "The gravity recovery and climate experiment : Mission overview and early results", *Geophys. Res. Let.*, **31**, 10.1029/2004GL019920.
- [89] Tapley, B. D., Bettapdur, S., Ries, J. C., Thompson, P. F., and Watkins, M. M., 2004b, "GRACE Measurements of Mass Variability in the Earth System", *Science*, **305**, pp. 503–505.
- [90] Thomas, J. B., 1999, "An Analysis of Gravity-Field Estimation Based on Intersatellite Dual-One-Way Biased Ranging", Technical report, Jet Propulsion Laboratory, USA.
- [91] Velicogna, I., and Wahr, J., 2002, "Postglacial Rebound and Earth's viscosity structure from GRACE", *J. Geophys. Res.*, **107(B.12)**, 10.1029/2001JB001735.
- [92] Vicente, R. O., and C. R. Wilson, 1997, "On the variability of the Chandler frequency", *J. Geophys. Res.*, **102(B9)**, 20,439–20,446.
- [93] Wahr, J., Swenson, S., Zlotnicki, V., and Velicogna, I., 2004, "Time-variable gravity from GRACE : First results", *Geophys. Res. Let.*, **31**, 10.1029/2004GL019779.
- [94] Williams, J. G., 1994, "Contributions to the Earth's Obliquity rate, Precession and Nutation", *Astron. J.*, **108(2)**, pp. 711–724.
- [95] Wilson, C. R., and Vicente, R. O., 1990, "Maximum likelihood estimates of polar motion parameters", *Variations in Earth Rotation, Geophys. Mono. Ser.*, **59**, edited by D. D. McCarthy and W. E. Carter, AGU, Washington, D.C., pp. 151–155.
- [96] Woolard, E. W., 1953, *Astr. Pap. Amer. Naut. Almanach XV*, **I**, pp. 1–165.
- [97] Yoder, C. F., Williams, J. G., Dickey, J. O., Schutz, B. E., Eanes, R. J., and Tapley, B. D., 1983, "Secular variation of earth's gravitational harmonic J2 coefficient from Lageos and nontidal acceleration of earth rotation", *Nature*, **303**, pp. 757–762.

[98] Zarrouati, O., 1997, "Trajectoires Spatiales", Cepadues Editions.